

DOI:10.20079/j.issn.1001-893x.220812002

双层三阶多项式拟合的弹道导弹发射点估计方法*

邱明劼^{1,2}, 周垂红¹, 汪圣利¹

(1. 南京电子技术研究所, 南京 210039; 2. 中国电子科学研究院, 北京 100041)

摘要: 发射点估计是炮位侦察校射雷达的重要任务之一。在仅利用雷达测量数据的情况下, 先通过三阶函数拟合弹道导弹主动段时间-高度曲线估计导弹的绝对发射时刻, 从而求得各个弹道轨迹点相对于绝对发射时刻的相对发射时间, 然后再次利用三阶函数拟合主动段相对时间-水平位移, 进而得到弹道导弹发射点估计结果。通过弹道导弹运动模型仿真具有一二级助推的弹道数据, 并增加雷达观测误差, 分析验证了所提方法的有效性和精确性。经测试, 所提方法求解过程简单, 对主动段弹道拟合准确, 发射点估计精度达到 0.6% 以内, 定位误差较传统方法降低了 50% 以上。

关键词: 弹道导弹; 发射点位置估计; 炮位侦察雷达; 主动段弹道拟合

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



微信扫描二维码
听独家语音释文
与作者在线交流
享本刊专属服务

中图分类号: TN959.1 文献标志码: A 文章编号: 1001-893X(2024)02-0239-08

A Ballistic Missile Launch Point Estimation Method Based on Double Layer Third-order Polynomial Fitting

QIU Mingjie^{1,2}, ZHOU Chuihong¹, WANG Shengli¹

(1. Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing 210039, China;
2. China Academy of Electronics and Information Technology, Beijing 100041, China)

Abstract: Launch point estimation is one of the important tasks of artillery location radars. In this paper, the authors first estimate the absolute launch time of ballistic missile by fitting the time-height curve of the powered phase trajectory, so as to obtain the relative time of every trajectory point. In this step, the third-order polynomial function is used for fitting. After that, the authors use the third order polynomial function again to fit the relative time-horizontal displacement curve. Two fitting procedures both only use radar measurement data to get results. The effectiveness and accuracy of the proposed method are verified by testing on the simulation trajectory data generated through utilizing the ballistic missile motion model and adding radar observation errors. After a lot of testing, the proposed method is proved to be easy for calculating and accurate for fitting the powered phase trajectory. The estimation accuracy of the launch point is less than 0.6%, and the locating error is reduced more than 50% compared with that of the traditional method.

Key words: ballistic missile; launch point estimation; artillery location radar; powered phase trajectory fitting

0 引言

传统炮位侦察雷达的作战对象以迫击炮、榴弹炮等无动力炮弹为主, 此类目标运动轨迹符合抛物线弹道规律, 发射点较好预测。但随着作战纵深的日益增加, 中近程战术弹道导弹逐步成为炮位侦察

雷达的新型作战对象。

与无动力的炮弹不同, 弹道导弹的飞行过程可分为主动段和被动段两个部分^[1]。由于弹道导弹主动段和被动段运动存在较大差异, 为了实现发射点的精确估计, 炮位侦察雷达需针对主动段轨迹

* 收稿日期: 2022-08-12; 修回日期: 2022-09-24
通信作者: 邱明劼 Email: minjichau@yeah.net

而非被动段轨迹进行建模或拟合,从而外推得到发射点位置。然而,由于导弹在主动段的受力情况十分复杂,对于非合作目标,在无先验信息情况下难以准确推断导弹的运动模型,仅能根据理论方法构建近似模型^[2-3]。目前对主动段弹道近似建模的方法可以分为两类:一是利用主动段弹道轮廓先验知识进行建模^[4]。该类方法通常需要预先积累大量先验数据,难度大且通常只能对已知型号导弹起到较好效果,对未知型号的估计效果差。二是利用通用数学模型对主动段弹道进行拟合^[5-7]。由于该类方法不需要积累先验知识,具有可行性强、适用性广的优势特点,因而是目前研究的主要方向。

现有的传统弹道外推算法大多使用各种滤波(如粒子滤波)或平滑算法(如最小二乘)处理雷达测量的位置和速度数据后,直接代入质点弹道方程计算,但在长距离情况下外推误差较大,难以适应弹道导弹的远距离外推需求^[8]。文献[9]和[10]分别采用了简单线性模型和重力转弯模型进行弹道拟合,但均无法准确反映主动段运动特性,导致估计精度大幅下降。文献[11]提出了基于时间逆转的反向卡尔曼滤波方法,对于传统炮弹发射点估计效果较好,但仍无法适应弹道导弹主动段运动特征。

本文提取弹道导弹主动段在垂向和射向两个方向的运动特征,将发射点零时刻估计作为发射点估计的中间过程,提出了一种基于双层拟合的发射点估计方法。该方法首先利用发射时间和导弹垂直位移之间的关系,利用三次多项式迭代估计导弹发射零时,然后利用时间与射向之间的物理关系,估计出导弹发射点位置。本文所提方法估计参数数量少,计算简单,定位误差较传统方法降低了 50% 以上,具有重要军事应用价值。

1 弹道导弹运动轨迹仿真

通过正向设计,精确仿真弹道导弹轨迹是进行弹道运动轨迹研究和发射点估计的重要前提。表 1 给出了弹道导弹的飞行阶段及其受力情况,以此为理论基础进行轨迹仿真^[12]。

表 1 弹道模型的分段及其受力情况

Tab. 1 Segmentations and force conditions of the ballistic model

飞行阶段	受力情况
主动段	地心引力、推进力、空气阻力、科氏力和离心力
自由段	地心引力、科氏力和离心力
再入段	地心引力、空气阻力、科氏力和离心力

假设弹道导弹关机点以后仅受到重力的作用,导弹目标的位置为 $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$, 速度为 $\mathbf{v} =$

$[v_x, v_y, v_z]^T$, 则依据圆球体地球模型建立的弹道导弹运动轨迹可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_C \end{aligned} \quad (1)$$

式中: \mathbf{a}_T 为推进力产生的加速度; \mathbf{a}_D 为空气阻力产生的加速度; \mathbf{a}_G 为地心引力产生的加速度; \mathbf{a}_C 为科氏力和离心力产生的加速度。 $\mathbf{a}_T, \mathbf{a}_D, \mathbf{a}_G, \mathbf{a}_C$ 构成了弹道目标的加速度^[13]。

根据文献[14], 设导弹在第 i 级火箭燃烧的初始时刻总质量为 W_{Mi}^0 , 第 i 级火箭推进力大小为 F_i , 第 i 级火箭单位时间燃料消耗 dM_{di} , 则第 i 级火箭的 k 时刻推进力产生的加速度为

$$\mathbf{a}_{Ti}^k = \frac{F_i}{W_{Mi}^0 - k \times dM_{di}} \quad (2)$$

设 \mathbf{p} 是地心到导弹的向量, $\mathbf{u}_p = \mathbf{p} / \|\mathbf{p}\|$ 是单位向量, $\mu_G = 3.985\ 325 \times 10^{14} \text{ Nm}^2/\text{kg}$ 为地球引力常量, 地心引力加速度可表示为

$$\mathbf{a}_G(\mathbf{p}) = -\frac{\mu_G}{\|\mathbf{p}\|^2} \mathbf{u}_p \quad (3)$$

设 $\rho(h)$ 是空气密度函数, $\rho_0 = 1.22 \text{ kg/m}^3$, $k = 0.141\ 41 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, $h(t)$ 为 t 时刻目标海拔高度, $\mathbf{v}(t)$ 为 t 时刻目标速度, \mathbf{u}_v 是单位向量, $m(t)$ 为 t 时刻目标质量, $c_D(v)$ 是阻力系数, S 是目标体与其速度方向的截面积, 则空气阻力加速度可近似表示为

$$\mathbf{a}_{D}(t) = -\frac{\rho(h(t)) \|\mathbf{v}(t)\|^2}{2\beta} \mathbf{u}_v \quad (4)$$

$$\rho(h(t)) = \rho_0 e^{-kh(t)} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{m(t)}{c_D(v(t)) S} \quad (6)$$

设 $\boldsymbol{\omega} = [0, 0, \omega]^T$ 是地球自转角速度矢量, 则科氏力和离心力产生的加速度为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_C(t) = \mathbf{a}_C^1(t) + \mathbf{a}_C^2(t) \\ \mathbf{a}_C^1(t) = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{a}_C^2(t) = -2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}(t)) \end{cases} \quad (7)$$

综上所述, 根据式(1)~(7), 可得到弹道导弹主动段运动模型为

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= v_x, \dot{p}_y = v_y, \dot{p}_z = v_z \\ \dot{v}_x &= (a_T - a_D) \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_x}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad (2\omega v_y + \omega^2 p_x) \\ \dot{v}_y &= (a_T - a_D) \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_y}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\quad (-2\omega v_x + \omega^2 p_y) \end{aligned}$$

$$\dot{v}_z = (a_T - a_D) \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_z}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

在被动段没有了推力,运动模型变为

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= v_x, \dot{p}_y = v_y, \dot{p}_z = v_z \\ \dot{v}_x &= -a_D \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_x}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & (2\omega v_y + \omega^2 p_x) \\ \dot{v}_y &= -a_D \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_y}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & (-2\omega v_x + \omega^2 p_y) \\ \dot{v}_z &= -a_D \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} - \frac{\mu p_z}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (9)$$

根据式(8)和式(9)即可通过正向设计的方式构建出弹道导弹的仿真运动轨迹,用于对本文所提方法进行仿真验证。

2 主动段双层拟合方法

图 1 为主动段双层拟合方法的流程图,主要包括拟合坐标系建立、发射零时刻估计、主动段水平位移拟合和发射点估计及误差计算 4 个步骤。

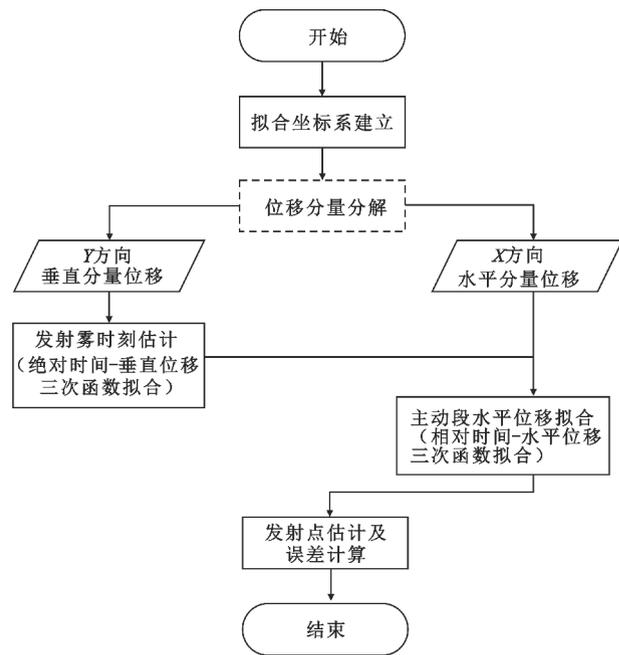


图 1 主动段双层拟合方法流程

Fig. 1 Flowchart of the double-layer fitting method of powered phase

2.1 拟合坐标系建立

弹道曲线是在发射坐标系 $O'X'Y'Z'$ 下进行描述的,但由于雷达无法提前知悉非合作目标的发射

点位置,仅能通过探测数据拟合发射坐标系,从而在这个坐标系下进行发射点估计。在本文中将雷达依据观测数据建立的坐标系称为拟合坐标系。

拟合坐标系是以雷达观测到的第一个导弹位置点在水平面上的投影作为原点 O ,以雷达观测到的主动段数据在水平面上的投影的最小二乘拟合结果作为 X 轴,垂直于水平面竖直向上为 Y 轴,如图 2 中虚线坐标系 $OXYZ$ 所示。

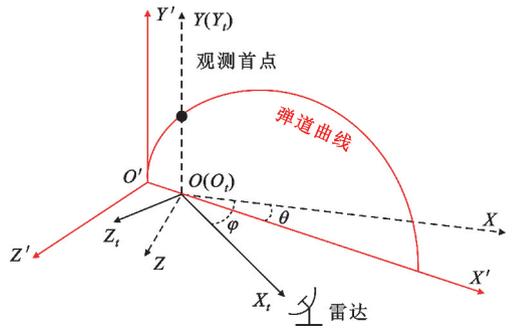


图 2 拟合坐标系 $OXYZ$ 、发射坐标系 $O'X'Y'Z'$ 和临时坐标系 $O_iX_iY_iZ_i$ 示意图

Fig. 2 Flowchart of fitted coordinate system $OXYZ$, launching coordinate system $O'X'Y'Z'$ and temporary coordinate system $O_iX_iY_iZ_i$

为了建立拟合坐标系,需要首先依据雷达的部署位置,首先建立临时坐标系 $O_iX_iY_iZ_i$,然后再通过坐标旋转的方法,将其旋转至拟合坐标系下。

下面具体阐述拟合坐标系建立的过程:

1) 以雷达观测到的第一个弹道导弹轨迹点在地面上的投影为临时坐标系原点 O_i ,其与雷达位置之间的连线为临时坐标系 X_i 轴,垂直地面向上为临时坐标系 Y_i 轴,并根据右手法则确定临时坐标系 Z_i 轴,则观测到的临时坐标系下的轨迹点集合为 $P_i = \{[0, 0, z_0]^T, [x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}]^T, [x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}]^T \dots\}$ 。

2) 对轨迹点集合 P_i 在 $X_iO_iY_i$ 平面上的投影进行一阶函数最小二乘拟合,求得各轨迹点 Y_i 轴坐标关于 X_i 轴坐标的关系,即 $y_{im} = f(x_{im}) = ax_{im} + b$,其中 a 和 b 是最小二乘拟合得到的拟合参数。

3) 根据求得的参数 a ,得到临时坐标系 $O_iX_iY_iZ_i$ 与拟合坐标系 $OXYZ$ 之间的角度偏差 $\varphi = \arctan a$,然后使用旋转矩阵将轨迹点坐标进行转换,即

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

得到在拟合坐标系下的轨迹点集合 $P = \{[x_0, y_0, z_0]^T, [x_1, y_1, z_1]^T, [x_2, y_2, z_2]^T \dots\}$ 。

通过上述步骤,即可将坐标由雷达初始探测得

到的临时坐标系转换至拟合坐标系中。在后续的两三次三阶多项式拟合过程中,均认为弹道仅在拟合坐标系的 XOY 平面内运动,在可以将导弹在三维空间中的位移情况简化为在弹道平面内的二维运动,简化弹道估计的同时完成了位移分量的分解,得到在 X 方向的水平位移和 Y 方向的垂直位移两个分量。

但从图 2 中可以看到,拟合坐标系 Y 轴与导弹发射坐标系的 Y' 轴方向相同,但 X 轴和 Z 轴均与实际发射坐标系的 X' 轴和 Z' 轴存在一个角度偏差 θ ,这是由于实际弹道主动段在 Z' 方向的运动以及雷达的观测误差影响所导致。在仿真条件下,可以通过对无误差的仿真弹道在 $X'O'Z'$ 平面投影的坐标进行一次多项式拟合,从而与拟合坐标系下的轨迹点集合拟合结果进行比较,根据两者拟合后一次函数的斜率求得角度偏差 θ 。但在实际作战条件下,将无法获取这个角度,这将使得沿着拟合坐标系 X 轴进行外推的方向与实际弹道运动方向之间存在偏差,而这正是发射点估计的误差来源之一。

2.2 发射零时刻估计

在 2.1 节建立的拟合坐标系中,当忽略弹道轨迹在 Z 轴方向上的运动时,可认为 $z_{T_n} \equiv 0 (n=1,2,3 \dots)$,则导弹绝对发射时刻 T_s 的弹道点坐标可表示为 $(x_{T_s}, y_{T_s}, z_{T_s}) = (x_{T_s}, 0, 0)$, T_i 时刻的弹道点坐标为 $(x_{T_i}, y_{T_i}, 0)$ 。通过弹道导弹运动模型仿真结果和大量实测数据可以看出,导弹主动段在垂直方向的位移量 y_{T_i} 和水平方向的位移量 $x_{T_i} - x_{T_s}$ 均为随相对发射时间 $t_i = T_i - T_s (i=1,2,3 \dots)$ 单调增长的平滑曲线。

尽管 T_s 和 $x_{T_i} - x_{T_s}$ 均为未知量,但绝对发射时间 T_i 和在 Y 轴方向上的位移量 y_{T_i} 均直接已知,因此可以假设 $T_s = 0$ s,则 $t_i = T_i$,通过三阶函数最小二乘拟合的方法,拟合出时间 t_i 与 y_{T_i} 的函数关系 $y_{T_i} = g(t_i)$ 。考虑到发射的导弹在相对发射时间 0 s 以前,其高度方向位移应始终等于 0,而在相对发射时间 0 s 之后,高度方向位移应当始终大于 0,因此在进行函数拟合时,基于上述事实对拟合过程进行约束:当 $t_i \leq 0$ 时,主动段 Y 方向位移均等于 0;当 $t_i > 0$ 时,主动段 Y 方向位移均大于等于 0,即

$$g(t_i) \begin{cases} = 0, t_i \leq 0 \\ > 0, t_i > 0 \end{cases} \quad (11)$$

从而使得拟合得到的三次函数曲线系数快速收敛,且不会因为过拟合导致外推趋势发散。

根据上述两个事实可知,当拟合出的三次函数曲线最靠近初始观测值的零点坐标越接近于 0 时,

即 t_0 越接近于 0 s,所拟合出的函数应当越符合事实情况。因此,在拟合出时间-垂向位移函数曲线后,首先使用梯度下降法求出离第一个观测点最近的拟合曲线零点坐标 $(t_z, 0)$,然后将发射零时刻加上 t_z 与优化速率 η 乘积代表的时间修正量 Δt ,对 T_s 进行修正。该过程也可等效为将所有观测数据时间 T_i 减去由 t_z 与优化速率 η 乘积代表的时间修正量 Δt ,对 T_i 进行修正。

$$T_s = T_s + \Delta t \text{ 或 } T_i = T_i - \Delta t \quad (12)$$

$$\Delta t = \eta t_z$$

之后重复利用新的相对时间 t_i 与位移 y_{T_i} 进行拟合、求零点、修正,使得逐次求得的三次函数零点 t_z 逐步与 0 s 接近。当拟合曲线零点坐标 t_z 小于所设定的阈值 $t_{\text{threshold}}$,即可认为在满足上述约束条件下,时间-垂向位移拟合曲线与真实弹道在 Y 方向的曲线吻合,从而确定了每个轨迹点的相对时刻 t_i 。

发射零时刻估计的具体过程如下:

1) 假定 $T_s = 0$,利用每个轨迹点的绝对时刻 T_i 和高度方向位移 y_{T_i} 进行三次函数的最小二乘拟合,得到拟合函数

$$y_{T_i} = g(t_i) = a_y t_i^3 + b_y t_i^2 + c_y t_i + d_y。$$

2) 使用梯度下降法,从第一个观测到的轨迹点开始,求出离其最近的拟合曲线零点坐标 $(t_z, 0)$ 。

3) 若 $|t_z| \leq t_{\text{threshold}}$,即认为此时的 T_s 已经足够接近真实时间,拟合得到的曲线与实际情况吻合,得到拟合结果 $g(t_i)$; $|t_z| > t_{\text{threshold}}$,则使用优化速率 η 乘以 t_z 得到时间修正量 Δt 。

4) 将 T_s 加上时间修正量 Δt ,重新求得每个轨迹点的相对时间 $t_i = T_i - T_s$ 。

5) 重复步骤 1)~3),直至得到拟合结果 $g(t_i)$ 。

2.3 主动段水平位移拟合

在拟合坐标系中,发射点位置估计实际上已经被转化为求取相对时间 t_0 时刻水平 X 方向位移量的问题。在 2.2 节中已经将 T_s 收敛至真实绝对发射时间,从而使得发射点的相对发射时间 $t_0 \approx 0$ s,进而进行第二次三次函数的最小二乘拟合。此时将各轨迹点的相对发射时间 t_i 作为自变量,以轨迹点的 X 方向位移作为应变量进行最小二乘拟合,即可得到导弹在水平面投影上的时间-水平位移拟合结果 $x_{T_i} = h(t_i)$ 。

在进行三次函数拟合之前,同样需要考虑如下的约束条件。由于是采用三次多项式对 X 方向的位移进行拟合,而对位移求导即可得到对应方向上的运动速度,因此在 X 方向上的速度应为二次多项

式形式。考虑弹道导弹通常采用垂直发射,在 X 方向上初始速度为 0,因此首先对时间-速度曲线构建无常数项的二次多项式拟合模型:

$$v_{t_i} = k(t_i) = a_x t_i^2 + b_x t_i \quad (13)$$

接着再对上式进行积分即可得到 X 方向位移关于时间 T_i 的三次多项式模型:

$$x_{t_i} = p(t_i) = a_x t_i^3 + b_x t_i^2 + c_x \quad (14)$$

利用该三次多项式模型对数据进行最小二乘拟合,即可得到主动段水平位移关于发射相对时间的具体表达式。由于这次拟合没有相关的事实约束条件,因此其拟合精度与 $t_0 \approx 0$ s 的准确性密切相关。

2.4 发射点估计及误差计算

通过前述分析可知,经过双层拟合后,发射点在拟合坐标系下的估计位置 $(\hat{x}_s, \hat{y}_s, \hat{z}_s)$ 为 $(x_{t_0}, 0, 0)$, 当认为 $t_0 = 0$ 时,该坐标即为 $(c_x, 0, 0)$ 。

由于拟合坐标系中的 XOY 平面是对三维发射坐标系中 $X'O'Y'$ 平面的近似估计,两者之间存在角度偏差 θ ,为了计算发射点估计结果的误差,需要在发射坐标系中的真实发射点位置坐标根据角度 θ 变换至拟合坐标系下。

根据 2.1 节所述,利用一次多项式拟合求得拟合坐标系和真实发射坐标系之间的夹角 θ 后,设发射点真实位置在发射坐标系中的坐标为 (x_T', y_T', z_T') , 雷达观测首点在发射坐标系中的坐标为 (x_F', y_F', z_F') , 则发射点真实位置在拟合坐标系中的坐标 (x_S, y_S, z_S) 可表示为

$$\begin{cases} x_S = (z_T' - z_F') \sin \theta + (x_T' - x_F') \cos \theta \\ y_S = 0 \\ z_S = (z_T' - z_F') \cos \theta - (x_T' - x_F') \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

从而得到最终的发射点定位误差 ε 为

$$\varepsilon = \sqrt{(\hat{x}_s - x_S)^2 + (\hat{y}_s - y_S)^2 + (\hat{z}_s - z_S)^2} = \sqrt{(c_x - x_S)^2 + z_S^2} \quad (16)$$

当雷达与导弹发射点之间距离为 R 时,定位精度 P 定义为定位误差除以侦察距离:

$$P = \frac{\varepsilon}{R} \quad (17)$$

3 仿真实验及结果分析

3.1 仿真条件

仿真过程采用搭载主频为 3.00 GHz 的 i5 处理器的计算机进行,仿真语言为 Matlab 语言。

仿真时,首先根据式(8)和式(9)表示的弹道导

弹主动段和被动段运动模型,调整参数生成射程 200~1 000 km 的近程战术弹道导弹轨迹,然后设置雷达位置并生成雷达观测数据。结合实际作战场景情况,假设炮位侦察雷达部署于导弹射向方向,且距离发射点位置 300 km,雷达探测角度精度 0.1° 、距离精度 100 m,探测仰角范围为 $2^\circ \sim 25^\circ$,仿真场景如图 3 所示。

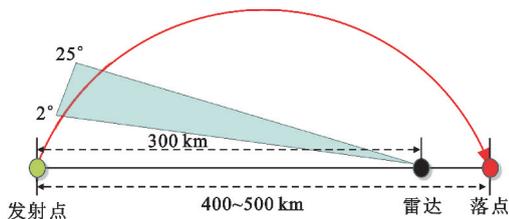


图 3 仿真实验场景设置图

Fig. 3 Schematic diagram of simulation experiment scene

考虑地球曲率影响和雷达仰角探测范围,从仿真生成的弹道中选择出可被雷达观测的弹道弧段,并添加雷达测量误差。接着分别使用常规弹道外推的定轨方法^[15],和本文提出的主动段双层拟合方法进行发射点位置估计,并多次添加雷达误差进行蒙特卡罗仿真,统计发射点精度结果。单次仿真流程如图 4 所示。

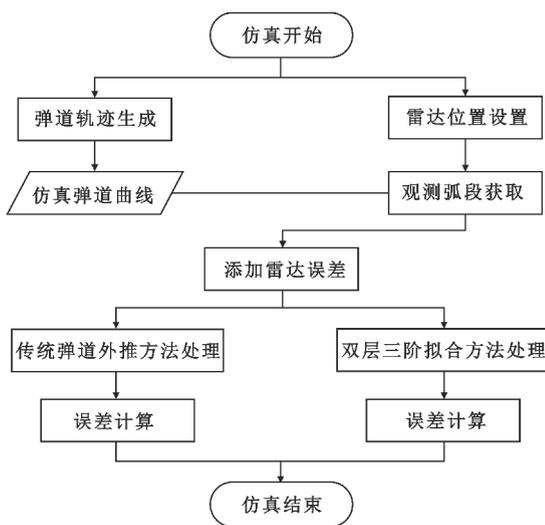


图 4 单次仿真实验流程

Fig. 4 Flowchart of single simulation experiment

本文所提方法中提到的时间修正量阈值参数 $T_{\text{threshold}}$ 和优化速率参数 η , 在所有的仿真过程中均取 2 和 0.5, 发射时间 T_s 初始值设置为 -100 s, 则相对时间 $t_0 = 100$ s。

3.2 仿真分析

根据弹道导弹运动模型生成的某条弹道轨迹如

图 5 所示,并以此弹道轨迹为例进行精度分析。该弹道在发射坐标系下各方向的位移与时间的关系曲线如图 6 所示,其中红色曲线部分即为弹道导弹主动段轨迹,黑色曲线部分为被动段轨迹。

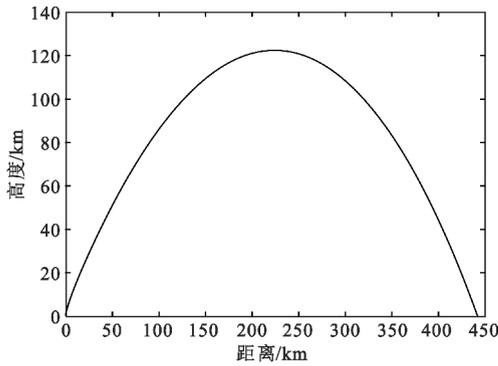


图 5 某条仿真弹道轨迹
Fig. 5 One of the simulation trajectories

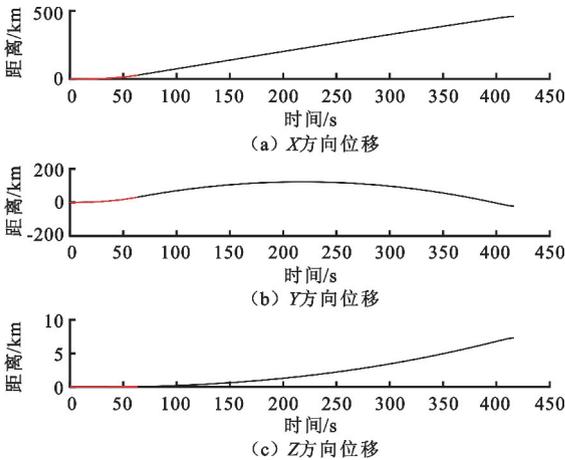


图 6 某条仿真弹道时间-位移分量曲线
Fig. 6 The curve of time versus displacement component of a simulated trajectory

选取添加测量误差后的主动段数据,利用主动段双层拟合方法则雷达可观测到的弹道轨迹如图 7 所示。

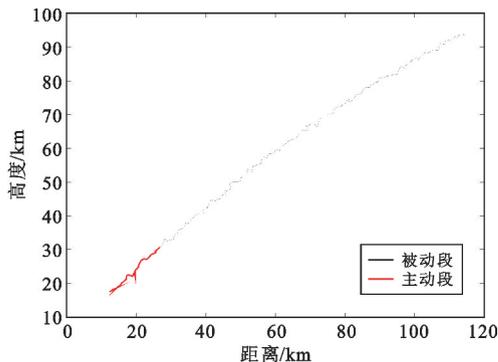
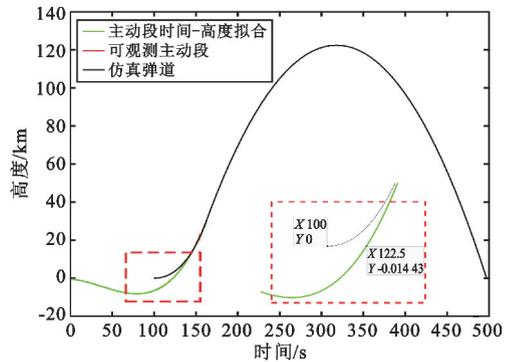


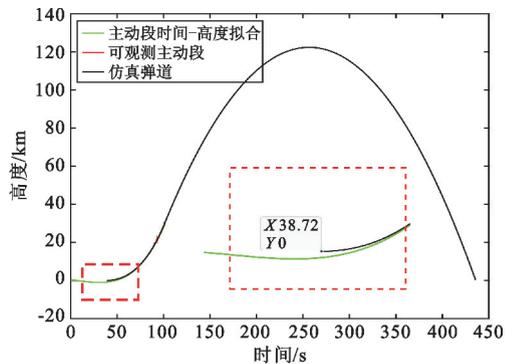
图 7 雷达可观测弹道轨迹

Fig. 7 Observable ballistic trajectory of radar

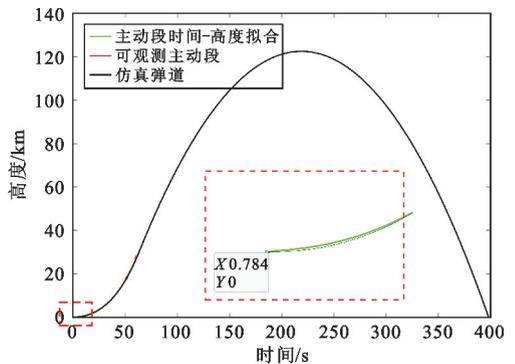
接着利用标准三次多项式模型对主动段的时间-高度曲线进行拟合。第一次拟合后拟合曲线及弹道曲线的图形如图 8(a) 所示。由于 T_s 的初始值设置为 $T_s = -100$ s,图 8(a) 中仿真弹道的初始点相对时间坐标 t_0^1 即为 100 s。经计算得到拟合曲线过零点坐标为 $t_z^1 \approx 122.5$ s,因此在第二次拟合时所有轨迹点的相对时间 t_i 均减去 ηt_z^1 ,此时 $t_0^2 = t_0^1 - \eta t_z^1 = 100$ s - 0.5×122.5 s ≈ 38.72 s,如图 8(b) 所示。经过 9 次拟合迭代后 t_0^9 由 100 s 收敛至 0.784 s,此时 $|t_z^9| < t_{\text{threshold}}$ 迭代停止。拟合结果如图 8(c) 所示。



(a) 时间-位移拟合第 1 次迭代结果



(b) 时间-位移拟合第 2 次迭代结果



(c) 时间-位移拟合第 9 次(最终)迭代结果

图 8 主动段时间-高度三阶函数拟合结果

Fig. 8 The height fitting results respect to time of the powered phase with the third-order function

将第一层三阶拟合后得到的 T_i 用于和拟合坐标系中的 X 方向水平位移进行第二层三阶拟合,得到拟合结果如图 9 中绿色曲线所示。

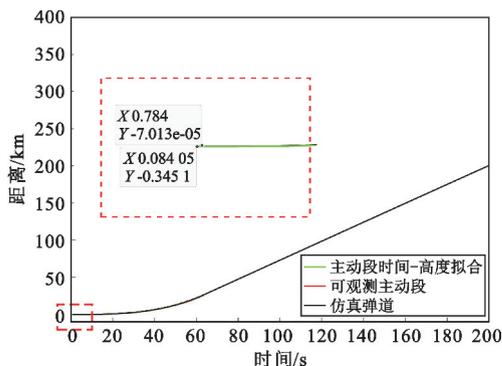


图 9 主动段时间-水平位移三阶函数拟合结果

Fig. 9 The horizontal displacement fitting results respect to time of the powered phase with the third-order function

从图 9 中可以看出,在构建的拟合坐标系下,发射点位置估计结果为 $(-345.13, 0, 0)$ m。通过坐标变换,真实发射点位置转换至拟合坐标系下的坐标值为 $(-70.13, 0, -40.51)$ m,根据式(15)可得定位误差为 277.97 m,并根据式(16)计算得到本次仿真定位精度为 $277.97/300000=0.09\%$ 。

按照上述实验方法,共仿真生成 10 条弹道,其中前 7 条弹道为单级助推导弹弹道,后 3 条为二级助推导弹弹道。每条弹道采用传统弹道导弹定轨方法和本文方法分别进行 100 次蒙特卡罗实验,并使用 2.4 节所提的精度计算方法进行统计,得到发射点定位误差和精度情况如表 2 所示。从表 2 的结果可以看出,在仿真条件下,传统利用定轨方法对具有一级和二级助推的仿真弹道发射点定位精度在 $0.7\% \sim 1.4\%$ 之间,而本文所提方法对发射点的估计精度可达到 0.6% 以内,定位误差相比优于传统方法降低 50% 以上。

表 2 传统弹道外推方法与本文方法定位误差对比

Tab. 2 Comparisons of positioning errors between traditional ballistic extrapolation method and the proposed method

弹道	弹道射程/km	助推级数	定位误差/m		定位精度/%	
			传统定轨方法	本文方法	传统定轨方法	本文方法
弹道 1	441.9	1	2 427.96	573.62	0.81	0.19
弹道 2	440.6	1	2 281.31	578.14	0.76	0.19
弹道 3	385.4	1	3 607.63	730.02	1.20	0.24
弹道 4	385.0	1	2 793.70	695.30	0.93	0.23
弹道 5	239.5	1	2 258.34	484.85	0.75	0.16
弹道 6	259.4	1	2 173.25	535.33	0.72	0.18
弹道 7	957.5	1	3 723.95	1 017.59	1.24	0.34
弹道 8	896.9	2	3 002.18	1 145.28	1.00	0.38
弹道 9	900.3	2	3 809.22	1 451.65	1.27	0.48
弹道 10	879.9	2	3 994.44	1 656.65	1.33	0.55

接着进一步考虑不同雷达探测精度对本文算法的影响。对于现有雷达,角度精度通常在 0.5° 以内,且对于远距离探测时角度精度带来的测量误差远大于距离精度影响,因此仅分析雷达角度精度对定位精度的影响。

分别选取具有一级助推和二级助推的弹道 1 和弹道 8 作为雷达测量精度对定位精度影响分析的实验弹道。假设雷达测角精度不超过 0.5° ,每 0.01° 设置一个精度采样间隔,生成雷达测量误差与理论弹道轨迹叠加,并使用本文方法在每个测角精度条件下进行 100 次蒙特卡罗实验,统计对两条弹道的发射点定位精度,结果如图 10 所示。

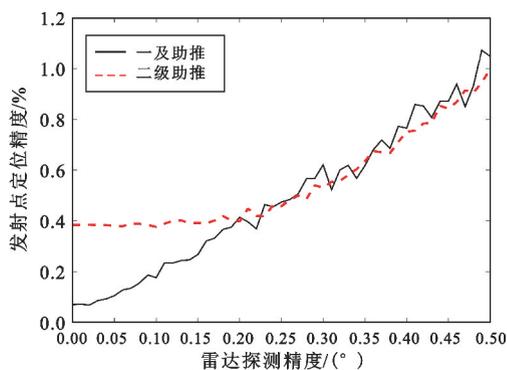


图 10 不同雷达探测精度下的发射点定位精度

Fig. 10 The positioning accuracy of launch points under different radar detection accuracies

从图 10 可以看出,对于具有一级助推和二级助推的弹道导弹轨迹,其发射点定位精度随着雷达精度变差而逐步变差,但即使在雷达测角精度达到 0.5° 的情况下,使用本文算法得到的定位误差也仅与测角精度 0.1° 情况下使用传统方法得到的定位精度相近,从而充分说明本文所提方法可有效指导我方部队遂行精确对地打击任务,具有明显先进性。同时,本文算法在 3.1 节所述的仿真条件下,单次仿真运行时间约为 0.03 s,满足发射点解算的实时性要求,具备良好的工程可实现性。

4 结束语

本文提出了一种基于主动段双层拟合的弹道导弹发射点估计方法,利用三阶函数拟合弹道导弹轨迹的时间-高度曲线,较准确地估计出相对发射时刻后,再利用相对发射时间与水平距离位移进行第二次三阶函数拟合,进而得到发射点的位置估计结果。在仿真实验条件下,将本文方法与传统弹道外推方法进行了对比,充分验证了方法的有效性。

本文所提方法能够良好处理具有一级和二级助推的弹道导弹发射点估计任务,但当主动段的运动状态更加复杂时,其轨迹将难以使用简单多项式函数进行拟合逼近,从而导致较大预测误差。随着机器学习和神经网络的广泛应用,其在轨迹预测方面已有许多学者开展研究。由于神经网络具有对复杂非线性系统的良好逼近能力,将神经网络的方法引入到弹道导弹发射点估计中提升定位精度可作为后续进一步研究的方向。

参考文献:

- [1] 邵文佳,郝欣,孙伟. 基于雷达数据的导弹发射点位置估计[J]. 现代雷达,2021,43(7):38-43.
- [2] 张涛,樊士伟,薛永宏,等. 基于最优样条节点的导弹主动段弹道估计方法[J]. 航空学报,2015,36(9):3027-3033.
- [3] 张毅,肖龙旭,王顺宏. 弹道导弹弹道学[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2005.
- [4] 申镇,强胜,易东云. 基于运动方程的单星无源主动段射向估计方法[J]. 弹道学报,2010,22(1):7-10.
- [5] 李冬,易东云,程洪玮,等. 低轨预警自由段弹道估计的多项式逼近算法[J]. 国防科技大学学报,2011,33(4):48-50.
- [6] 张强. 基于 α - β - γ 滤波的迫击炮定位[J]. 电讯技术,2015,55(6):634-638.
- [7] WANG S, FENG J, WANG F, et al. Near space interception of ballistic missiles during boost phase [C]//Proceedings of 2011 IEEE 2nd International Conference on Computing, Control and Industrial Engineering. Wuhan:IEEE,2011:1-4.
- [8] 武瀚文,查启程,梁桑,等. 基于遗传算法的弹道外推方法[J]. 指挥控制与仿真,2021,43(5):102-106.
- [9] EASTHOPE P F, HEYS N W, DRUMMOND O E. Multiple-model target-oriented tracking system [C]//Proceedings of Signal and Data Processing of Small Targets. Orlando:SPIE,1994:624-635.
- [10] FARRELL W. Interacting multiple model filter for tactical ballistic missile tracking [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2008,44(2):418-426.
- [11] 王干,熊凤,欧能杰,等. 基于反向扩展卡尔曼滤波的弹道外推算法[J]. 电光与控制,2020,27(12):49-52.
- [12] 钮俊清,单奇. 多级助推段弹道导弹的轨迹仿真[J]. 雷达科学与技术,2011,9(2):144-149.
- [13] LI X R, JILKOV V P. Survey of maneuvering target tracking. part II: motion models of ballistic and space targets [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2010,46(1):96-119.
- [14] 张峰,田康生,息木林. 多级助推段弹道导弹建模与弹道仿真[J]. 计算机工程与应用,2013,49(10):247-252.
- [15] 贾沛然. 远程火箭弹道学[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1993.

作者简介:

邱明劫 男,1990 年生于福建福州,2015 年获硕士学位,现为工程师,主要研究方向为雷达系统技术。

周垂红 男,1985 年生于重庆,2013 年获博士学位,现为高级工程师,主要研究方向雷达数据处理技术。

汪圣利 男,1977 年生于安徽无为,2002 年获博士学位,现为研究员级高级工程师,主要研究方向为信息融合、雷达数据处理等。