

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2016.08.002

引用格式:陈国泰,张朝阳,张亮,等.系统极化码的置信传播译码性能分析[J].电讯技术,2016,56(8):839-843.[CHEN Guotai,ZHANG Zhaoyang,ZHANG Liang,et al.Performance analysis of systematic polar codes with belief propagation algorithm[J].Telecommunication Engineering,2016,56(8):839-843.]

系统极化码的置信传播译码性能分析\*

陈国泰<sup>1,2</sup>,张朝阳<sup>\*\*2</sup>,张亮<sup>2</sup>,陈平平<sup>3</sup>

(1.福建师范大学福清分校 电信学院,福州 350300;2.浙江大学 信息与通信工程研究所,杭州 310027;  
3.福州大学 物理与信息工程学院,福州 350116)

摘 要:置信传播(BP)算法可以为系统极化码提供软信息作为判决依据,也可以为系统极化码在级联迭代译码中提供交换软信息。在详细描述基于信道极化结构的置信传播算法基础上,比较了系统极化码在软信息判决方法和极化编码判决方法下错误率性能的差异。仿真结果表明,软信息判决方法可以提高系统极化码的误比特率,在高信噪比下误帧率方面也略有提高。

关键词:系统极化码;级联码;置信传播算法;软信息判决;译码性能

中图分类号:TN911.22 文献标志码:A 文章编号:1001-893X(2016)08-0839-05

Performance Analysis of Systematic Polar Codes with Belief Propagation Algorithm

CHEN Guotai<sup>1,2</sup>,ZHANG Zhaoyang<sup>2</sup>,ZHANG Liang<sup>2</sup>,CHEN Pingping<sup>3</sup>

(1. School of Electronics and Information,Fuqing Branch of Fujian Normal University,Fuzhou 350300,China;  
2. Institute of Information and Communication Engineering,Zhejiang University,Hangzhou 310027,China;  
3. College of Physics and Information Engineering,Fuzhou University,Fuzhou 350116,China)

Abstract:Belief propagation(BP) algorithm can generate soft information for systematic polar codes(SPC) to make decoding decisions and the soft information also can be used as extrinsic information in turbo decoding. This paper first provides a detailed description of BP algorithm based on the structure of channel polarization. Then,it introduces two decision methods,one of which is by exploiting the soft information while the other one is by using polar encoding. The decoding performance under these two methods are compared by simulation,and the simulation results demonstrate that a better bit error rate(BER) performance can be obtained if the soft information is used,while the frame error rate(FER) performance is slightly improved as well in high signal-to-noise ratio(SNR) regime.

Key words:systematic polar codes;concatenated codes;belief propagation algorithm;soft decision;decoding performance

\* 收稿日期:2016-01-08;修回日期:2016-05-05 Received date:2016-01-08;Revised date:2016-05-05  
基金项目:国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目(2012CB316104);国家高技术研究发展计划(863 计划)项目(2014AA01A702);国家自然科学基金资助项目(61371094,61401391,61401099);福建省教育厅中青年教育科研项目(JA12350,JA14339)  
Foundation Item:The National Basic Research Program of China(973 Program)(2012CB316104);The National High-tech R&D Program of China(863 Program)(2014AA01A702);The National Natural Science Foundation of China(No. 61371094,61401391,61401099);The Research Fund of Education Department of Fujian Province(JA12350,JA14339)

\*\* 通信作者:ning\_ming@zju.edu.cn Corresponding author:ning\_ming@zju.edu.cn

1 引言

极化码<sup>[1]</sup>是 Arikan 在分析信道极化基础上提出的一种信道编码,它是目前唯一一种在确定性编码结构下能够证明 Shannon 极限可达的信道编码。

在极化核矩阵  $F=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  下,极化码具有以下优点:

极化码的编码结构类似于快速傅里叶变换的蝶形结构,其编码和译码复杂度均为  $O(M\ln N)$ ;根据信道变化可以实现动态编码,使得极化码无错误平板或者具有极低的错误平板;串行抵消 (Successive Cancellation, SC) 算法在短码长和中等码长情况下的译码性能较差,但目前结合列表算法 (List Decoding) 并借助循环冗余校验 (Cyclic Redundancy Check, CRC) 的 SC 算法<sup>[2-3]</sup>在有限码长下性能可超越低密度奇偶校验 (Low - density Parity - check, LDPC) 码<sup>[4]</sup>、Turbo 码<sup>[5]</sup>等先进信道编码。

由于 Arikan 最初提出的极化码是非系统极化码 (Nonsystematic Polar Codes, NSPC),为了便于实现类似 Turbo 码的并行级联码,2011 年 Arikan 在非系统极化码的信道极化结构上构造出系统极化码 (Systematic Polar Codes, SPC)<sup>[6]</sup>,并仿真得到比非系统极化码更好的误比特率性能。这些作者在分析系统极化码的错误率时,先将信道接收的信息按非系统极化码进行译码并判决,再将判决的非系统极化码字经极化编码获得系统极化码的译码判决 (本文称之为极化编码判决方法)。

置信传播 (Belief Propagation, BP) 算法在极化码译码时可以得到软信息并可用作级联码中迭代译码时的交换信息<sup>[7-8]</sup>,因此 BP 算法在极化码中也是备受关注的译码算法。文献[9]最先利用 BP 算法分析极化码的性能,文献[10-11]分别分析了基于信道极化结构上的 BP 算法,这些研究工作是针对非系统极化码的。本文在[10-11]的基础上给出了详细的 BP 算法步骤,并用该算法对系统极化码的译码性能进行分析,比较了在软信息判决方法和极化编码判决方法下的错误率性能差异。

2 极化码

$N(=2^n)$  个相互独立且具有信道容量  $I(W)$  的信道  $W$ ,经过信道合并和信道分离,可以使这  $N$  个独立的信道形成新的  $N$  个信道,而这新的  $N$  个信道前后存在依赖关系,当  $N\rightarrow\infty$  时,占总数比例为  $I(W)$  的信道趋于无噪信道 (“好”信道),比例为  $1-I(W)$  的

信道趋于全噪信道 (“坏”信道)。

图 1 是信道极化的过程。首先右端  $N$  个信道进行合并:

$$\prod_{i=0}^{N-1} W(y_i | x_i) = W_N(y | x) = W_N(y | uG) = W_N(y | u), \tag{1}$$

式中:  $G=F^{\otimes n}$  是  $F$  的  $n$  次 Kronecker 幂;  $u=(u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$  为输入比特信息;  $x=(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  为极化码码字;  $y=(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  为信道接收的信息。信道分离是根据式 (1) 所示的信道转移概率实现:

$$W_N^{(i)}(y_0^{N-1}, u_0^{i-1} | u_i) = \sum_{u_{j \in [0,1]}}^{j=i+1, \dots, N-1} \frac{1}{2^{N-1}} W_N(y_0^{N-1} | u_0^{N-1}). \tag{2}$$

根据转移概率可以计算出 Bhattacharyya 参数来评价分离后的比特信道的“好坏”程度 (或其他方法来评价比特信道的“好坏”程度,可参见文献[12]及其所列文献)。

为了构造系统极化码,使用户传输的比特信息作为码字中的一部分, Arikan 在靠近信道这一端 (如图 1 中的右端) 选择与左端非冻结比特信道具有相同索引值的比特位用于配置用户比特信息,并基于图 1 的结构推算出右端其他未知的比特 (如图 1 中带 “?” 的比特),这些未知比特与用户比特信息形成一个极化码码字。关于系统极化码的编码方案,可参见文献[13]及其文献列表。

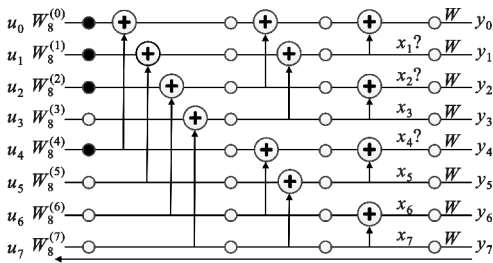


图 1  $N=8$  的信道极化过程  
Fig. 1 Channel polarization and polar encoder with  $N=8$

3 极化码的置信传播 (BP) 算法

Arikan 在提出极化码时采用一种 SC 算法作为极化码的译码算法,但是由于 SC 算法在有限码长下不能得到理想的极化码译码性能,在文献[9]中, Arikan 采用经典 BP 算法 (即基于校验矩阵实现置信传播译码) 对 RM 码和非系统极化码的性能进行比较分析。在文献[10-11]中,研究工作者研究了基于信道极化结构 (如图 2) 的 BP 算法 (本文称为极化码 BP 算法)。其中, Zhang 等人<sup>[10]</sup>的研究结果

表明了极化码 BP 算法在译码性能上可优于经典 BP 算法。由于系统极化码和非系统极化码具有相同的信道极化结构, 极化码 BP 算法同样适用于系统极化码, 而且 BP 算法可以为系统极化码产生软信息作为迭代译码中的交换信息。本节在现有研究成果的基础上, 阐述了极化码 BP 算法的详细步骤, 特别是对初值设置、信息输出(译码判决以及用于信息交换的软信息)加以说明。

对于长度为  $N(=2^n)$  的极化码, 根据信道极化层次从左到右分为层次 0 至层次  $n-1$  (如图 2), 极化码 BP 算法从信道接收到的信息开始从右向左进行置信传播(如图 2 上方所示), 再从左向右进行置信传播(如图 2 下方所示)形成一次迭代。注意, 图 2 是在图 1 的信道极化结构做了位置置换。为了节省译码的计算量, 在 BP 算法译码之前将冻结位从左向右推算, 将确定性的节点也作为冻结位处理(如图 2 斜线圆点所示)。

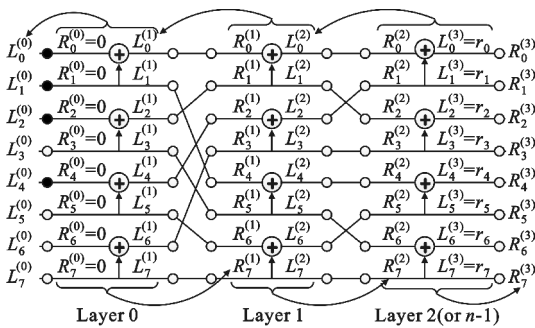


图 2 极化码的 BP 算法译码流程图 ( $N=8$ )

Fig. 2 Decoding process of BP algorithm for polar codes ( $N=8$ )

记  $\mathbf{y}=(y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})$  为信道接收到的信息, 其对应的对数似然比值记为  $\mathbf{r}=(r_0, r_1, \cdots, r_{N-1})$ , 其中  $r_i=\ln \frac{W(y_i|0)}{W(y_i|1)}(i=0, 1, \cdots, N-1)$ , 则基于对数似然比的极化码 BP 算法如图 2 所示, 具体描述如下:

(1) 设置初始值 右端  $\mathbf{L}^{(n)}=(L_0^{(n)}, L_1^{(n)}, \cdots, L_{N-1}^{(n)})$  设置为信道输出的对数似然比值  $\mathbf{r}=(r_0, r_1, \cdots, r_{N-1})$ , 左端  $\mathbf{R}^{(0)}=(R_0^{(0)}, R_1^{(0)}, \cdots, R_{N-1}^{(0)})$  设置为 0 向量,  $\mathbf{L}^{(n)}$  和  $\mathbf{R}^{(0)}$  在迭代译码期间均保持不变,  $\mathbf{R}^{(k)}(k=1, 2, \cdots, n-1)$  初始值均设为 0;

(2) 从右端向左端开始运算 由  $\mathbf{L}^{(k+1)}$  和  $\mathbf{R}^{(k)}$  推算出  $\mathbf{L}^{(k)}(k=n-1, \cdots, 1)$ , 对于非系统极化码, 根据硬判决的需要可以进一步推算出  $\mathbf{L}^{(0)}$  (由  $\mathbf{L}^{(0)}$  依据

$\hat{u}_i=\begin{cases} 0, L_i^{(0)} \geq 0 \\ 1, L_i^{(0)} < 0 \end{cases}$  可得到非系统极化码的当前判决

$\hat{u}$ ), 否则可以不需要计算以节省运算量;

(3) 从左端向右端开始 由  $\mathbf{R}^{(k)}$  和  $\mathbf{L}^{(k+1)}$  推算出  $\mathbf{R}^{(k+1)}(k=0, 1, \cdots, n-2)$ , 对于系统极化码, 根据硬判决或者软信息交换的需要决定是否进一步推算出  $\mathbf{R}^{(n)}$ , 否则可以不需要计算以节省运算量; 系统极化码的软信息输出为  $\mathbf{R}^{(n)}+\mathbf{L}^{(n)}$ ; 步骤 2 和 3 形成一次迭代;

(4) 重复步骤 2~3 直至满足迭代停止条件为止, 比如达到最大迭代次数。

在极化码 BP 算法中, 置信传播分为处理单元 (Processing Element, PE) 内部置信传播和处理单元间置信传递。处理单元间置信传递实际上是一个位置置换的过程, 可以参照快速傅里叶变换的蝶形结构中的位置置换(如图 2 所示), 这里不展开说明。对于处理单元来说, 根据处理单元左端的冻结情况, 可以分为 4 种情况来处理, 如图 3 所示。在图 3(c) 情况下, 由于信息已知而无需进行置信传播, 图 3(d) 情况是不可能发生的情况, 因为经过信道极化后, 下方的信道必被提升而“好”于上方的信道。

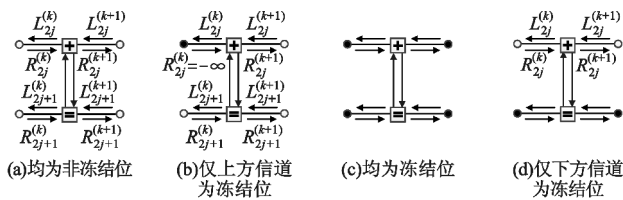


图 3 极化码 BP 算法中的 4 种不同处理单元

Fig. 3 Four types of processing element in BP algorithm for polar codes

图 3(a) 情况的置信传播分向左传播和向右传播。向左置信传播按式(3)进行:

$$\begin{cases} L_{2j}^{(k)} = (L_{2j+1}^{(k+1)} + R_{2j+1}^{(k)}) \otimes L_{2j}^{(k+1)} \\ L_{2j+1}^{(k)} = (R_{2j}^{(k)} \otimes L_{2j}^{(k+1)}) + L_{2j+1}^{(k+1)} \end{cases}, \quad (3)$$

而向右置信传播的计算式子如下:

$$\begin{cases} R_{2j}^{(k+1)} = (L_{2j+1}^{(k+1)} + R_{2j+1}^{(k)}) \otimes R_{2j}^{(k)} \\ R_{2j+1}^{(k+1)} = (R_{2j}^{(k)} \otimes L_{2j}^{(k+1)}) + R_{2j+1}^{(k)} \end{cases} \quad (4)$$

图 3(b) 情况由于  $2j$  位被冻结(假定被设置为 0), 则向左置信传播的式子为

$$\begin{cases} L_{2j}^{(k)} = (L_{2j+1}^{(k+1)} + R_{2j+1}^{(k)}) \otimes L_{2j}^{(k+1)} \\ L_{2j+1}^{(k)} = L_{2j}^{(k+1)} + L_{2j+1}^{(k+1)} \end{cases}, \quad (5)$$

而向右传播的表达式为

$$\begin{cases} R_{2j}^{(k+1)} = L_{2j+1}^{(k+1)} + R_{2j+1}^{(k)} \\ R_{2j+1}^{(k+1)} = L_{2j}^{(k+1)} + R_{2j+1}^{(k)} \end{cases} \quad (6)$$

以上式子中,⊗的具体运算如下:

$$a\otimes b=-\text{sgn}(a)\text{sgn}(b)\min(|a|,|b|)+\ln(1+e^{-|a-b|})-\ln(1+e^{-|a+b|}).\tag{7}$$

对于图 3(b) 情况,由于 2j 位被冻结而不需要置信传播,因此式(5)也可以不进行计算。可以看到,在图 3(b) 情况下置信更新的计算量很小。

通常,系统极化码的判决方式为:以非系统极化码方式进行译码,得到  $\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{u}}$  通过式(1)得到系统极化码码字  $\hat{\mathbf{x}}$ ,从  $\hat{\mathbf{x}}$  中提取信息位(如  $N=8$  时  $x_3,x_5,x_6,x_7$  的信息值)作为系统极化码的判决。在前面所描述的 BP 算法中,步骤 3 所得到的软信息  $\mathbf{R}^{(n)}+\mathbf{L}^{(n)}$  也可以依据  $\begin{cases} 0,R_i^{(n)}+L_i^{(n)}\geq 0\\ 1,R_i^{(n)}+L_i^{(n)}< 0 \end{cases}$  进行硬判决作为系统极化码的判决结果。遗憾的是,这种方法得到的判决不一定是极化码码字。

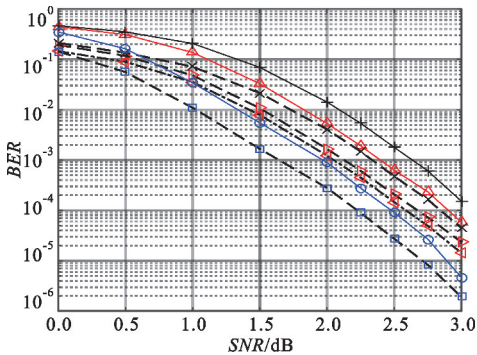
当系统极化码作为级联子码<sup>[7-8]</sup>时, $\mathbf{R}^{(n)}$  将作为外部信息传递给其他译码模块。

4 性能仿真与分析

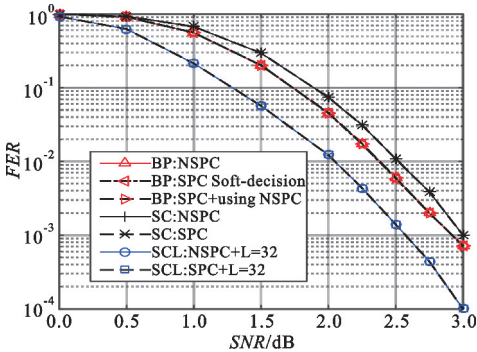
为了比较在 BP 算法下不同判决方法在错误率上的性能差异,本节给出了码率为 1/2、长度为1 024 ( $2^{10}$ ) 系统极化码在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noisy,AWGN)信道下的仿真结果。其中,采用二进制移相键控(BPSK)进行调制  $\{0\rightarrow+1,1\rightarrow-1\}$ ,每个信噪比点的仿真帧数为200 000。本节还提供了非系统极化码的仿真结果,考虑了在串行抵消(SC)算法以及串行抵消列表(SC List Decoding,SCL)译码算法下的仿真性能。其中在 BP 算法中最大迭代次数设定为 60 次,在 SCL 算法中路径保留条数  $L$  设定为 32。

图 4 是在上述仿真参数下的误比特率和误帧率性能。其中,“using NSPC”表示系统极化码采用极化编码判决方法,而“using Soft-decision”表示系统极化码采用软信息判决方法。另外,在 SC 算法和 SCL 算法中,系统极化码是采用极化编码判决方法。

图 4 显示,系统极化码的误比特率总优于非系统极化码的误比特率。在 BP 算法中,利用软信息判决的系统极化码的误比特率略优于通过非系统极化码所得的性能。由于软信息做出的判决有时不是一个极化码码字,因此在误帧率方面会略差;但在高信噪比时,软信息判决的误帧率略优于非系统极化码做出的判决。



(a) 误比特率 (BER)



(b) 误帧率 (FER)

图 4 N=1 024 系统极化码的译码性能  
Fig.4 Performance of systematic polar codes with N=1 024

由图 4 中可以看到,BP 算法的性能优于 SC 算法,但 SCL 算法可以获得比 BP 算法更好的性能,其原因之一是 SCL 算法能较好地利用信道极化的特点进行译码。

5 结束语

系统码是构造并行级联码的子码,BP 算法可以为系统极化码提供软信息以实现级联码中迭代译码的信息交换。本文详细描述了基于信道极化结构上的 BP 算法,并在该算法下比较了在软信息判决方法和极化编码判决方法下的系统极化码译码性能。仿真结果表明在软信息判决方法下,系统极化码可以获得更好的误比特率性能。由于 BP 算法未能较好地利用极化码的极化特性,在译码性能上劣于串行抵消列表译码法。如何将极化码的极化特性融合到 BP 算法中以提高 BP 算法在系统极化码的译码性能是值得研究的一个问题,本文提供的算法步骤可以为深入探讨该问题提供有益的参考。

参考文献:

[1] ARIKAN E. Channel polarization;a method for construc-

- ting capacity—achieving codes for symmetric binary—input memoryless channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(7): 3051–3073.
- [2] TAL I, VARDY A. List decoding of polar codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(5): 2213–2226.
- [3] NIU K, CHEN K. CRC-aided decoding of polar codes[J]. IEEE Communications Letters, 2012, 16(10): 1668–1671.
- [4] 包昕, 王达, 刘婉月. 利用软解调序列的 LDPC 码闭集识别方法[J]. 电讯技术, 2015, 55(1): 55–60.  
BAO Xin, WANG Da, LIU Wanyue. A finite set recognition algorithm of LDPC coding by using soft-demodulation sequence[J]. Telecommunication Engineering, 2015, 55(1): 55–60. (in Chinese)
- [5] 肖创创, 郭荣海, 李际平, 等. 直升机卫星通信系统 Turbo 码外交织器设计与仿真[J]. 电讯技术, 2014, 54(4): 486–490.  
XIAO Chuangchuang, GUO Ronghai, LI Jiping, et al. Design and simulation of Turbo codes' interleaver in helicopter satellite communication system[J]. Telecommunication Engineering, 2014, 54(4): 486–490. (in Chinese)
- [6] ARIKAN E. Systematic polar coding[J]. IEEE Communications Letters, 2011, 15(8): 860–862.
- [7] ZHANG Q, LIU A, ZHANG Y, et al. Practical design and decoding of parallel concatenated structure for systematic polar codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(2): 456–466.
- [8] LIU A, WU D, ZHANG Q, et al. Parallel concatenated systematic polar codes[J]. Electronics Letters, 2016, 52(1): 43–45.
- [9] ARIKAN E. A performance comparison of polar codes and Reed–Muller codes[J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12(6): 447–449.
- [10] ZHANG Y, LIU A, PAN X, et al. A modified belief propagation polar decoder[J]. IEEE Communications Letters, 2014, 18(7): 1091–1094.
- [11] YUAN B, PARHI K. Architectures for polar BP decoders using folding [C]//Proceedings of 2014 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). Melbourne, Australia: IEEE, 2014: 205–208.
- [12] VANGALA H, VITERBO E, HONG Y. A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel[J]. Mathematics, 2015(1): 1–7.

- [13] CHEN G T, ZHANG Z, ZHONG C, et al. A low complexity encoding algorithm for systematic polar codes[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(7): 1277–1280.

## 作者简介:



陈国泰(1975—),男,福建莆田人,2009 年于福州大学获博士学位,现为福建师范大学福清分校电子与信息工程学院副教授,主要研究方向为信源信道编码、无线通信技术;

CHEN Guotai was born in Putian, Fujian Province, in 1975. He received the Ph. D. degree from Fuzhou University in 2009. He is now

an associate professor. His research concerns source coding, channel coding and wireless communications.

Email: chenguotai@163.com

张朝阳(1973—),男,湖北蕲春人,1998 年于浙江大学获博士学位,现为浙江大学教授、信息与通信工程系主任、浙江省信息处理与通信网络重点实验室主任、中国电子学会信息论分会副主任委员,主要研究方向为信息论与编码理论、信号处理技术及无线通信与网络;

ZHANG Zhaoyang was born in Qichun, Hubei Province, in 1973. He received the Ph. D. degree from Zhejiang University in 1998. He is now a professor, the Chair of the Department of Information and Communication Engineering, and the Director of Zhejiang Provincial Key Laboratory of Information Processing, Communication and Networking. He also serves as the Deputy Director of the Information Theory Society of the Chinese Institute of Electronics(CIE). His research concerns information theory and coding theory, signal processing techniques, and wireless communications and networking.

Email: ning\_ming@zju.edu.cn

张亮(1988—),男,河南郑州人,2011 年于浙江大学获学士学位,现为浙江大学博士研究生,主要研究方向为无线通信与信道编码;

ZHANG Liang was born in Zhengzhou, Henan Province, in 1988. He received the B. S. degree from Zhejiang University in 2011. He is currently working toward the Ph. D. degree. His research concerns wireless communications and channel coding.

陈平平(1986—),男,福建泉州人,2012 年于厦门大学获博士学位,现为福州大学讲师,主要研究方向为信道编码理论、网络编码与无线通信。

CHEN Pingping was born in Quanzhou, Fujian Province, in 1986. He received the Ph. D. degree from Xiamen University in 2012. He is now a lecturer. His research concerns channel coding theory, network coding and wireless communications.