

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2016.07.008

引用格式:汪镡林,田增山. 等式约束最小二乘在“北斗”姿态测量中的应用[J]. 电讯技术,2016,56(7):760-764. [WANG Yilin, TIAN Zengshan. Application of equality constrained least squares in BDS attitude determination[J]. Telecommunication Engineering, 2016, 56(7):760-764.]

等式约束最小二乘在“北斗”姿态测量中的应用*

汪镡林**, 田增山

(重庆邮电大学 移动通信技术重庆市重点实验室, 重庆 400065)

摘 要:针对传统无约束的姿态测量中整周模糊度求解成功率不高的问题,提出利用等式约束快速求解整周模糊度的算法,并将其应用于“北斗”姿态测量。该算法充分利用基线的先验信息,在整周模糊度的求解过程中加入等式约束,同时利用拉格朗日乘子法求解约束整数最小二乘问题,提高了姿态测量中整周模糊度和姿态角的求解成功率。采用静态测试和动态测试验证该算法,结果表明在“北斗”单历元条件下,整周模糊度及姿态角的求解成功率提升 30% 左右。

关键词:“北斗”卫星导航定位系统;姿态测量;整周模糊度;等式约束;拉格朗日乘子

中图分类号:TN965;P228 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2016)07-0760-05

Application of Equality Constrained Least Squares in BDS Attitude Determination

WANG Yilin, TIAN Zengshan

(Chongqing Key Laboratory of Mobile Communications Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: For the low success rate problem of ambiguity resolution in traditional unconstrained attitude determination, this paper proposes an algorithm that uses quadratic equality constraint to fast determine integer ambiguity, and applies it to Beidou Navigation Satellite System (BDS) attitude determination. This algorithm makes full use of a priori information baseline, adds equality constraints in the process of solving the ambiguity, and takes advantage of the Lagrange multiplier method for solving constrained integer least squares problems, thus improving the success rates of integer ambiguity resolution and attitude angle resolution. Static tests and dynamic tests validate that the algorithm can dramatically improve the success rates of integer ambiguity resolution and BDS attitude determination by about 30% under the condition of the BDS single epoch.

Key words: Beidou navigation satellite system; attitude determination; integer ambiguity; equality constrained; Lagrange multiplier

1 引 言

在“北斗”卫星导航定位系统中,高精度的载波相位技术可以应用在高精度定位和姿态测量中,利用载波相位进行高精度姿态测量的核心问题是整周

模糊度的求解,尤其是在单历元的实时应用方面。整周模糊度求解方法有很多种,目前应用最为广泛的是最小二乘模糊度去相关平差 (Least Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment, LAMBDA) 算

* 收稿日期:2015-12-03;修回日期:2016-03-03 Received date:2015-12-03;Revised date:2016-03-03
基金项目:重庆市基础与前沿研究计划项目 (cstc2013jcyjA40032)
Foundation Item: The Fundamental and Frontier Research Project of Chongqing (cstc2013jcyjA40032)
** 通信作者: vixylin@163.com Corresponding author: vixylin@163.com

法^[1]。LAMBDA 算法高效解决了无约束的整周模糊度问题。在传统的姿态测量中,例如单历元情况下,无约束的 LAMBDA 算法求解成功率不高。为了提高 LAMBDA 算法在单历元的实时姿态测量情况下的求解成功率,文献[2]利用基线信息作为先验信息来提高浮点解的精度,文献[3]利用基线长度作为简单约束条件,在 LAMBDA 算法搜索部分筛选待选解,以提升整周模糊度求解的成功率。

本文提出一种利用基线长度作为先验信息的改进 LAMBDA 算法,将约束条件应用于 LAMBDA 算法的搜索部分,通过更强的等式约束整数最小二乘,优化整周模糊度的搜索空间,提升“北斗”姿态测量中整周模糊度求解成功率。实验结果显示即使单历元条件下也能有效提升整周模糊度成功率,验证了该方法的有效性。

2 “北斗”姿态测量模型

“北斗”姿态测量模型中,单历元的观测条件下,双差伪距和载波相位观测方程^[4]线性化后得

$$E(\mathbf{y})=\mathbf{A}\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{b}, \quad D(\mathbf{y})=\mathbf{Q}_y。 \tag{1}$$

式中: $\mathbf{y}$ 是观测量; $\mathbf{a}$ 是整周模糊度; $\mathbf{b}$ 是基线向量; $\mathbf{A}$ 是含有载波波长的矩阵; $\mathbf{B}$ 是单位矢量矩阵; $\mathbf{Q}_y$ 是观测量的协方差矩阵。“北斗”姿态测量模型的无约束的整数最小二乘问题:

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3} \|\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{a}-\mathbf{B}\mathbf{b}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \|\hat{\mathbf{e}}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n} \|\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_a}^2 + \min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3} \|\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{a})-\mathbf{b}\|_{\mathbf{Q}_{b(\mathbf{a})}}^2。 \tag{2}$$

无约束的整数最小二乘在定位应用中使用具有很好的效果,但是在单历元的姿态测量模型中,由于观测条件的恶劣,整周模糊度 $\mathbf{a}$ 求解成功率不高。“北斗”姿态测量模型中无约束的整数最小二乘算法未使用载体基线的先验信息,添加了载体基线的先验信息后,使“北斗”姿态测量模型受到更强的约束,整周模糊度 $\mathbf{a}$ 求解成功率提高,进而姿态解算准确率提高。改进的“北斗”姿态测量模型中,加入了一个基线长度的约束条件, $\|\mathbf{b}\|^2=l^2$, l 为基线长度,则改进的“北斗”姿态测量模型中,无约束的整数最小二乘正交分解为^[5]

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{b}\|^2=l^2} \|\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{a}-\mathbf{B}\mathbf{b}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 = \|\hat{\mathbf{e}}\|_{\mathbf{Q}_y}^2 + \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n} (\|\hat{\mathbf{a}}-\mathbf{a}\|_{\mathbf{Q}_a}^2 + \min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{b}\|^2=l^2} \|\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{a})-\mathbf{b}\|_{\mathbf{Q}_{b(\mathbf{a})}}^2)。 \tag{3}$$

式(3)描述的是等式约束整数最小二乘(Quadratic Equality Constraints Integer Least-Squares, QC-

ILS),相比式(2),多了等式约束 $\|\mathbf{b}\|^2=l^2$ 。其对应的 QC-ILS 整周模糊度固定解为 $\tilde{\mathbf{a}}$,其对应的基线固定解为 $\tilde{\mathbf{b}}$ 。

3 等式约束的 LAMBDA 算法

3.1 等式约束最小二乘

“北斗”姿态测量模型中约束部分的核心算法是等式约束整数最小二乘。等式约束最小二乘描述如下:

$$\mathbf{x}=\operatorname{argmin}\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}-2\mathbf{b}^T\mathbf{x}\}, \mathbf{x}^T\mathbf{x}=l^2。 \tag{4}$$

其中约束条件为

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x}=l^2。 \tag{5}$$

式中: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称矩阵; $l \neq 0$ 且为常数。

这种约束优化问题可以用 Lagrange 乘数法求解。令损失函数为

$$J(\mathbf{x}, \lambda)=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}-2\mathbf{b}^T\mathbf{x}+\lambda(c^2-\mathbf{x}^T\mathbf{x}), \tag{6}$$

由 $\frac{\partial J(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}}=0$ 和 $\frac{\partial J(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda}=0$ 分别得

$$(\mathbf{A}-\lambda \mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}^T\mathbf{x}=l^2, \tag{7}$$

令 $\mathbf{x}=(\mathbf{A}-\lambda \mathbf{I})\mathbf{y}$, 并将其代入式(7)得

$$(\mathbf{A}-\lambda \mathbf{I})^2\mathbf{y}=\mathbf{b}。 \tag{8}$$

利用 $\mathbf{x}=(\mathbf{A}-\lambda \mathbf{I})\mathbf{y}$ 及 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵的性质,于是 $\mathbf{x}^T\mathbf{x}=l^2$ 可等价于

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b}=l^2, \tag{9}$$

由此得

$$\mathbf{b}=\mathbf{b}\mathbf{y}^T\mathbf{b}/l^2=\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{y}/l^2。 \tag{10}$$

又由 $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=\mathbf{b}^T\mathbf{y}$, 将式(10)代入式(8), 即有

$$[\lambda^2\mathbf{I}-2\lambda\mathbf{A}+(\mathbf{A}^2-l^{-2}\mathbf{b}\mathbf{b}^T)]\mathbf{y}=\mathbf{0}。 \tag{11}$$

由矩阵 $\mathbf{A}$ 的对称特性,方程(11)为一个对称的二次特征值问题^[6]。

二次特征值问题的求解步骤如下:

(1) 求解二次特征值问题式(11), 得到特征值 λ_i ;

(2) 确定最小的特征值 $\lambda_{\min}$;

(3) 约束最小二乘问题式(4)的解由 $\mathbf{x}=(\mathbf{A}-\lambda_{\min}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}$ 给出。

3.2 等式约束的 LAMBDA 算法

“北斗”姿态测量模型中,无约束的 LAMBDA 算法只求解了使得式(2)中的第二项取得最小值的解,得到对应的基线向量的最优解。等式约束整数最小二乘式(3)将基线长度的先验信息 $\|\mathbf{b}\|^2=l^2$ 应用于整周模糊度解求解和搜索过程。由于增加基

线约束条件,使得式(3)的第二项取得最小值的整数向量不一定同时满足使得第三项取得最小值。因此,本文提出一种判断模糊度和基线向量两个残差的和最小方法,扩展了无约束 LAMBDA 算法,提高了单历元条件下整周模糊度的求解成功率。

根据式(3)的正交分解,令

$$F(a)=\|\hat{a}-a\|_{Q_a}^2+\|\hat{b}(a)-\tilde{b}(a)\|_{Q_{b(a)}}^2, \quad (12)$$

其中等式约束基线向量的最优解

$$\tilde{b}(a)=\arg \min _{b \in \mathbb{R}^3, \|b\|^2=l^2}\|\hat{b}(a)-b\|_{Q_{b(a)}}^2 \circ$$

等式约束的基线向量最优解 $\tilde{b}(a)$ 的求解算法是等式约束的最小二乘

$$\min _{b \in \mathbb{R}^3, \|b\|^2=l^2}\|\hat{b}(a)-b\|_{Q_{b(a)}}^2 \circ \quad (13)$$

采用拉格朗日乘法,可得最优解

$$\tilde{b}(a)=(I-\Lambda Q_{\tilde{b}(a)})^{-1} \hat{b}(a) \circ$$

式中: Λ 为拉格朗日乘子;且 $\|\tilde{b}(a)\|_l^2=l^2$ 。因此,等式约束整数最小二乘 QC-ILS 的解为

$$\tilde{a}=\arg \min _{a \in \mathbb{Z}^n} F(a), \tilde{b}=\tilde{b}(\tilde{a}) \quad (14)$$

理论上,整周模糊度最优解 $\tilde{a}$ 可以通过对空间 Ω 进行全局搜索得到:

$$\Omega\left(\chi^2\right)=\left\{a \in \mathbb{Z}^n \mid F(a) \leqslant \chi^2\right\} \circ \quad (15)$$

具体步骤如下:

(1) 设定空间初值:选定一个 $\tilde{a}$, 空间初值 $\tilde{\chi}^2=F(\tilde{a})$ 。

(2) 通过原始的 LAMBDA 算法^[7]及 MLAMBDA 算法^[8],选取空间内的所有整数向量,如式(16)所示:

$$\Omega_0\left(\tilde{\chi}^2\right)=\left\{a \in \mathbb{Z}^n \mid\left\|\hat{a}-a\right\|_{Q_a}^2 \leqslant \tilde{\chi}^2\right\} \supseteq \Omega\left(\tilde{\chi}^2\right) \circ \quad (16)$$

(3) 对空间 Ω_0 所有的整数向量,计算对应的 $F(a)$ 的值,找到使 $F(a)$ 最小的一组整数向量,即为整周模糊度的最优解 $\tilde{a}$ 。

这种全局搜索的方法简单易于直接应用,但是这种等式约束整数最小二乘在“北斗”姿态测量中的搜索效率会很低,原因是对所有找到的整数向量 $F(a)$ 都需要计算,且计算每一组待选的整周模糊度向量对应的 $\tilde{b}(a)$ 的求解耗时也将增大很多。因此,如果搜索空间中含有了太多的整数向量,这种全局搜索方法的有效性将会直线降低。

3.3 改进等式约束的 LAMBDA 搜索方法

改进的整周模糊度搜索模型中,等式约束的

LAMBDA 的搜索方法是引入搜索空间的上下边界,通过确定粗略的搜索空间上下界,快速迭代确定最终的精确搜索空间上下边界,并搜索得到整周模糊度最优解,使得搜索过程的计算量大幅下降。即使在单历元超短基线下,改进后的等式约束的 LAMBDA 的搜索方法也能有效降低计算量,并快速求解到整周模糊度的最优解 $\tilde{a}$,进而快速求解得到载体的姿角。

改进的搜索方法确定 $F(a)$ 中第二部分值的上下界,避免计算搜索中每组整周模糊度向量对应的 $\tilde{b}(a)$ 。对搜索空间值的函数 $F(a)$ 边界值的求解,设 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 是矩阵 $Q_{b(a)}^{-1}$ 特征值的最大和最小值,则可以得到下式:

$$\left\{\begin{aligned} F_1(a) &\leqslant F(a) \leqslant F_2(a) \\ F_1(a) &=\left\|\hat{a}-a\right\|_{Q_a}^2+\lambda_{\min }\left(\left\|\hat{b}(a)\right\|_{l_3}-l\right)^2 \circ \\ F_2(a) &=\left\|\hat{a}-a\right\|_{Q_a}^2+\lambda_{\max }\left(\left\|\hat{b}(a)\right\|_{l_3}-l\right)^2 \end{aligned}\right. \quad (17)$$

根据式(17)中的两个上下界函数 $F_1(a)$ 和 $F_2(a)$,可求得对应的上下界搜索空间:

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_1\left(\chi^2\right) &=\left\{a \in \mathbb{Z}^n \mid F_1(a) \leqslant \chi^2\right\} \\ \Omega_2\left(\chi^2\right) &=\left\{a \in \mathbb{Z}^n \mid F_2(a) \leqslant \chi^2\right\} \end{aligned}\right., \quad (18)$$

且 $\Omega_1\left(\chi^2\right) 、 \Omega\left(\chi^2\right)$ 和 $\Omega_2\left(\chi^2\right)$ 满足关系:

$$\Omega_2\left(\chi^2\right) \leqslant \Omega\left(\chi^2\right) \leqslant \Omega_1\left(\chi^2\right) \circ \quad (19)$$

则改进后的等式约束的 LAMBDA 的搜索方法归纳为:

(1) 设定空间初值 χ_0 , 初值的选择可以根据 bootstrapping 算法^[9]获得;

(2) 在空间 Ω_1 中,找到一组满足条件整数向量 $\tilde{a}$, 即

$$\Omega_1\left(\chi_0^2\right)=\left\{a \in \mathbb{Z}^n \mid F_1(a) \leqslant \chi_0^2\right\} \supseteq \Omega\left(\chi_0^2\right); \quad (20)$$

(3) 如果没有找到整数向量,则增加搜索空间的值,即返回第 2 步直到找到满足条件的整数向量。

4 仿真结果分析

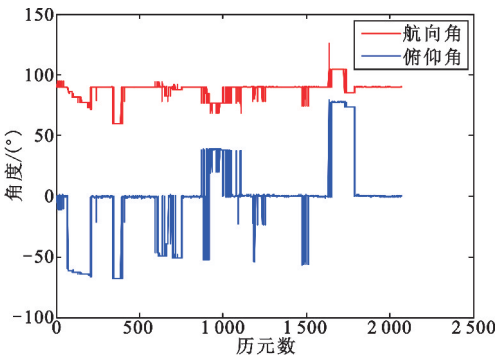
为验证等式约束最小二乘在“北斗”姿态测量算法的应用,我们采集“北斗”的原始观测数据并进行仿真分析。测试场地为重庆邮电大学逸夫科技楼顶楼(29.5316°N,106.5849°E),测试接收机为 Novatel 公司的 OEM617D“北斗”接收机。考虑到短基线相较于长基线有更大的应用优势,对各种载体都更适配安装,选择的单基线长度为 1.01 m。测试内容包括静态测试和动态测试,前者将双“北斗”测量天线固定在不锈钢材质的基线上,基线方向向东

(航向角 90°),观测多组不同历元的数据并仿真;后者将基线固定在自制转台上,顺时针旋转一周,观测并仿真。以上方法都是将数据存储在文件中,并对数据进行仿真分析。静态和动态测试都是可重复测试,以下分析选取的是部分测试结果。

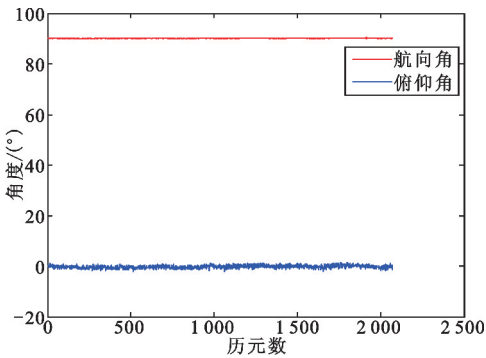
4.1 静态测试分析

静态测试结果有两组数据,第一组测试数据共

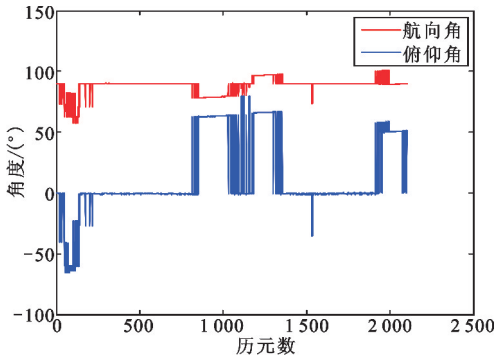
2 070 个历元,第二组测试数据共2 102个历元。图 1 是静态测试仿真结果图,其中(a)、(b)为第一组仿真结果,(c)、(d)为第二组仿真结果。第一组仿真结果中,(a)是无约束原始 LAMBDA 算法的结果,(b)是等式约束最小二乘算法的结果。第二组仿真结果中,(c)是无约束原始 LAMBDA 算法的结果,(d)是等式约束最小二乘算法的结果。



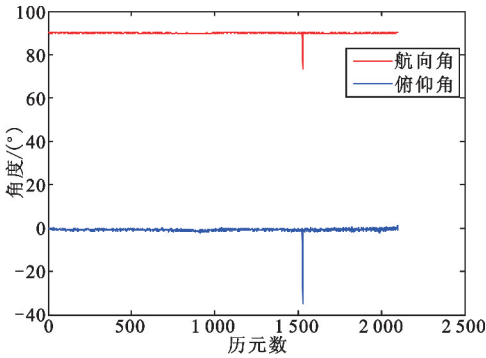
(a) 静态无约束“北斗”姿态角 1



(b) 静态约束“北斗”姿态角 1



(c) 静态无约束“北斗”姿态角 2



(d) 静态无约束“北斗”姿态角 2

图 1 静态姿态角
Fig.1 Static attitude angle

由图 1 中(a)、(c)可知,静态测量情况下,无约束原始 LAMBDA 算法求解成功率低,姿态角求解成功率不高,并且存在较大的波动。这是因为在单历元情况下,方程模型中加入伪距观测量,整周模糊度浮点解精度降低。由(b)、(d)结果可知,增加等式约束后,整周模糊度的求解过程加入了更多的先验约束信息,使姿态角的求解成功率有很大提升,且所求的姿态角的波动性较小。

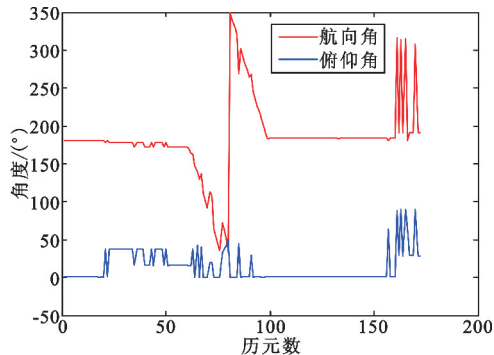
表 1 给出了无约束原始 LAMBDA 算法和等式约束最小二乘算法成功率的对比结果。

表 1 无约束 LAMBDA 和等式约束 LAMBDA 成功率 Tab.1 Unconstrained LAMBDA and equality constraints LAMBDA success rate				
数据	无约束的 LAMBDA/%		等式约束 LAMBDA/%	
	航向角	俯仰角	航向角	俯仰角
1	72.0	11.9	100.0	53.3
2	74.8	12.1	99.9	80.9

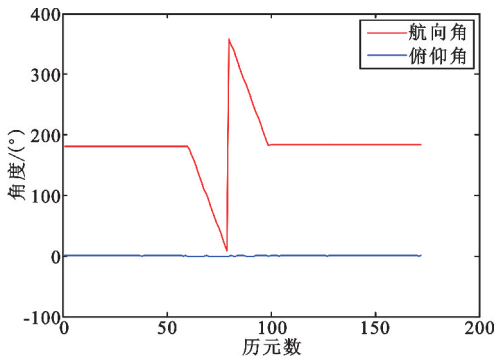
4.2 动态测试分析

动态测试过程是在步进电机转台系统条件下完成,模拟了真实应用中的低动态环境,转台在旋转过程中速度较快(约 50 秒/周),受测量条件限制,因

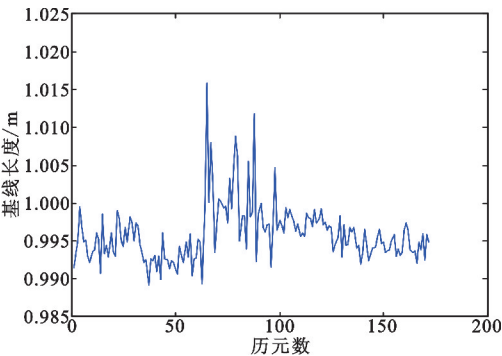
此动态测试持续时间较短。对动态数据进行仿真，得到无约束原始 LAMBDA 算法和等式约束最小二乘算法仿真结果如图 2 所示。



(a) 动态无约束“北斗”姿态角



(b) 动态约束“北斗”姿态角



(c) 约束基线长度

图 2 动态姿态角及基线长度

Fig. 2 Dynamic attitude angle and the baseline length

图 2 中,(a) 为无约束原始 LAMBDA 算法仿真结果,(b) 是等式约束最小二乘算法仿真结果,(c) 是约束条件下测得的基线长度值结果,可见解算的基线长度值具有较小的波动。

5 结 论

本文基于拉格朗日乘子求解等式约束最小二乘方法,并将其应用在“北斗”姿态测量模型中基线约

束的 LAMBDA 算法的搜索部分,提出了减小搜索空间计算量,快速求解整周模糊度的算法。该算法通过加入载体基线的先验信息,加入等式约束于整周模糊度的搜索中,使整周模糊度求解成功率有效提升。测试仿真结果表明,相比于无约束条件的“北斗”姿态测量,本文提出的等式约束最小二乘算法对单历元条件下的“北斗”姿态测量姿态角的求解成功率提升 30% 左右,可应用于实时的姿态测量中。

参考文献:

[1] TEUNISSEN P J G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment;a method for fast GPS integer ambiguity estimation[J]. Journal of Geodesy,1995,70(1-2):65-82.

[2] 唐卫明,孙红星,刘经南. 附有基线长度约束的单频数据单历元 LAMBDA 方法整周模糊度确定[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2005,30(5):444-446.

TANG Weiming, SUN Hongxing, LIU Jingnan. Ambiguity resolution of single epoch single frequency data with baseline length constraint using LAMBDA algorithm[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2005,30(5):444-446. (in Chinese)

[3] 王振杰,乔永杰. 附有基线长度约束的模糊度快速解算方法[J]. 全球定位系统,2013,38(2):19-22.

WANG Zhenjie, QIAO Yongjie. Fast ambiguity resolution with the baseline length constraint[J]. GNSS World of China,2013,38(2):19-22. (in Chinese)

[4] TEUNISSEN P J G. Integer least-squares theory for the GNSS compass[J]. Journal of Geodesy,2010,84(7):433-447.

[5] TEUNISSEN P. The LAMBDA method for the GNSS compass[J]. Artificial Satellites,2006,41(3):89-103.

[6] GOLUB G H, VON MATTU. Quadratically constrained least squares and quadratic problems[J]. Numerische Mathematik,1991,59(1):561-580.

[7] JONGE P, TIBERIUS C. The LAMBDA method for integer ambiguity estimation; implementation aspects[R]. Netherlands:Publications of the Delft Computing Centre,1996.

[8] CHANG X W, YANG X, ZHOU T. MLAMBDA; a modified LAMBDA method for integer least-squares estimation[J]. Journal of Geodesy,2005,79(9):552-565.

[9] TEUNISSEN P J G. Influence of ambiguity precision on the success rate of GNSS integer ambiguity bootstrapping[J]. Journal of Geodesy,2007,81(5):351-358.

作者简介:



汪镔林(1988—),男,四川泸县人,硕士研究生,主要研究方向为“北斗”姿态测量;
WANG Yilin was born in Luxian, Sichuan Province, in 1988. He is now a graduate student. His research concerns BDS attitude determination.
Email: vixylin@163.com

田增山(1968—),男,河南人,1999 年于电子科技大学获博士学位,现为教授,主要研究方向为“北斗”姿态测量、个人通信、卫星导航、无线定位、信号检测与估计。

TIAN Zengshan was born in Henan Province, in 1968. He received the Ph. D. degree from University of Electronic Science and Technology of China in 2002. He is now a professor. His research concerns BDS attitude determination, personal communications, satellite navigation, wireless localization and signal detection and estimation.