

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2015.07.015

引用格式:董李梅.基于空时联合抗干扰算法的复矩阵求逆[J].电讯技术,2015,55(7):792-796.[DONG Limei.Matrix Inversion Implementation Based on Joint Space-Time Anti-jamming Algorithm[J].Telecommunication Engineering,2015,55(7):792-796.]

基于空时联合抗干扰算法的复矩阵求逆*

董李梅**

(中国西南电子技术研究所,成都 610036)

摘要:针对卫星导航接收机易被干扰的特点,研究了空时联合抗干扰算法,并提出了一种简化的复正定厄米矩阵求逆实现方法。首先,给出了空时联合抗干扰算法的基本模型。随后,在详细分析传统复正定厄米矩阵求逆算法基础上,给出了改进的复正定厄米矩阵求逆方法的具体步骤。最后,基于数字信号处理(DSP)的硬件平台,对运算量进行了对比分析。仿真结果表明,改进的复正定厄米矩阵求逆方法加法和乘法运算量都大幅度降低,比传统算法运算速度加快了三分之一。算法简单可靠,易于实现,适用于工程应用中实时性要求较高的场合。

关键词:卫星导航接收机;空时联合抗干扰;矩阵求逆;功率倒置算法

中图分类号:TN973 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2015)07-0792-05

Matrix Inversion Implementation Based on Joint Space-Time Anti-jamming Algorithm

DONG Limei

(Southwest China Institute of Electronic Technology, Chengdu 610036, China)

Abstract:For the shortcoming that the satellite navigation receiver is easy to be interfered, a joint space-time method is researched and an improved complex Hermitian positive definite matrix inversion method is proposed based on matrix inversion part. First, the joint space-time method is presented. Second, according to the analysis of the traditional Hermitian positive definite matrix inversion method, an improved method is proposed, and the detailed process is given. Finally, the computations of addition, multiplication, division are compared based on Digital Signal Processing(DSP) hardware platform. Simulation results show that the computation of the improved method is significantly reduced. The improved method is simple, reliable, and easy to implement and can be applied in engineering applications where real-time requirement is strict.

Key words:satellite navigation receiver; space-time anti-jamming; matrix inversion; power inversion algorithm

1 引言

在卫星导航抗干扰领域,覆盖整个接收带宽的宽带信号极具破坏性。针对此类压制式干扰,自适应调零天线具有很好的抑制效果^[1-3]。但是,由于体积、成本限制,阵列天线的个数有限,这也意味着

空域调零的自由度有限,能够抑制的干扰数目也受到了限制。面临复杂干扰环境,尤其当干扰的多径反射存在时,通常联合利用时域和空域的自由度来提高干扰抑制个数和抗干扰抑制能力。自适应调零天线的信号处理算法中,采用矩阵求逆获得权值的

* 收稿日期:2015-02-10;修回日期:2015-04-24 Received date:2015-02-10;Revised date:2015-04-24

** 通讯作者:donglimei@126.com Corresponding author:donglimei@126.com

• 792 •

处理方式广泛应用。在实际工程应用中,矩阵求逆算法的实时性直接影响算法的优劣。如何降低矩阵求逆算法的运算量,提高矩阵求逆算法的实时性也成为近年来的研究热点之一^[4-6]。然而,大部分算法实现相对复杂,对运算量降低程度有限。

为此,本文针对空时联合抗干扰算法的自相关矩阵求逆的低运算量需求,基于数字信号处理(DSP)的信号处理平台,给出了一种简化的复正定厄米矩阵的求逆方法,并仿真验证了不同矩阵维数下改进算法的运算量。

2 算法基本结构

采用空时联合自适应处理时,算法处理器对从天线经信道送来的信号进行抽样处理,每路通道中的时域滤波器针对窄带信号和多径信号进行加权调整,空域滤波器主要针对信道信号中剩余的宽带信号进行加权调整,空时联合抗干扰处理能对抗多个干扰信号和多径干扰的影响。

自适应调零天线的基本框图如图 1 所示,空时联合处理根据最小输出功率准则选择合适的权值 w_{mq} 。

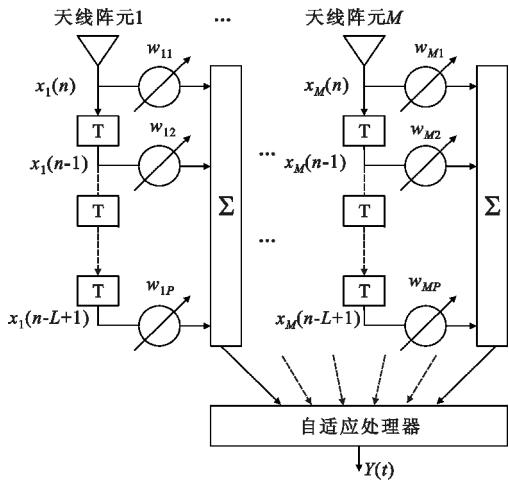


图 1 空时联合抗干扰结构框图

Fig. 1 Space-time anti-jamming structure diagram

每个天线接收到的信号 $x_m(n)$ 经过下变频处理后,进行 P 阶时域抽头。用 $MP \times 1$ 维向量 $\mathbf{x}$ 来表示每个阵列经过 P 次时延后的输入数据,即

$$\mathbf{x}^T = [x_1(0) \cdots x_1(P+1) \cdots x_M(0) \cdots x_M(P+1)]。 \tag{1}$$

M 个阵列经过 L 个数据段长度的采样后,形成的空时二维矩阵用 $\mathbf{X}$ 表示,即

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) & \cdots & x_1(L) \\ x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(P-1) & x_2(P) & \cdots & x_1(P+L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(0) & x_M(1) & \cdots & x_M(L) \\ x_M(1) & x_M(2) & \cdots & x_M(L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(P-1) & x_M(P) & \cdots & x_M(P+L-1) \end{bmatrix}。 \tag{2}$$

定义 $MP \times 1$ 维向量 $\mathbf{w}$ 为空时二维加权系数,即

$$\mathbf{w}^T = [w_{1,0} \cdots w_{1,P-1} \cdots w_{M,0} \cdots w_{MP-1}]。 \tag{3}$$

选取阵元 1 上无时延的信号为参考信号,即 $w_{1,0}$ 为 1,采用功率倒置算法选择其余加权向量 $\mathbf{w}_a^T = [w_{1,1} \cdots w_{1,P-1} \cdots w_{M,0} \cdots w_{MP-1}]$,阵元 2 ~ M 的最优权值为

$$\mathbf{w}_{aopt} = \mathbf{R}_{aa}^{-1} \mathbf{R}_{a1}。 \tag{4}$$

对于矩阵 $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_1$ 为 $[x_1(0) \ x_1(1) \ \cdots \ x_1(L)]$, $\mathbf{X}$ 矩阵下面剩余部分称 $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{R}_{a1}$ 为 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_a$ 的互相关矩阵, $\mathbf{R}_{aa}$ 为 $\mathbf{X}_a$ 和 $\mathbf{X}_a$ 的自相关矩阵,则最后得到权值矢量为 $\mathbf{w}^T = [1, -\mathbf{w}_{aopt}]$ 。将得到的 $M \times P$ 个加权系数与输入信号进行加权,加权后的输出表达式为

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{q=0}^{P-1} w_{mq} x(t-qT)。 \tag{5}$$

3 复正定厄米矩阵算法模型

3.1 传统复正定厄米矩阵求逆算法

由公式(4)给出的表达式可以看到,空时联合抗干扰算法需要对自相关矩阵 $\mathbf{R}_{aa}$ 进行求逆运算,简称 SMI 算法。常规 SMI 干扰抑制 $\mathbf{R}_{aa}^{-1}$ 采用复正定厄米矩阵求逆方法^[7]。

设 N 维复数矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$, $\mathbf{R}$ 逆阵为 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{C} + j\mathbf{D}$, 则 $(\mathbf{A} + j\mathbf{B})(\mathbf{C} + j\mathbf{D}) = \mathbf{I}$, 用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}。 \tag{6}$$

记 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$, 由于 $\mathbf{R}$ 为复正定厄米矩阵 $\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$, 可知 $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, 即 $\mathbf{P}$ 为实对称矩阵。由 $\mathbf{R}$ 的正定性可以推出 $\mathbf{P}$ 为正定矩阵, 故 $\mathbf{P}^{-1}$ 一定存在, 不妨设 $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_4 \end{bmatrix}$ 。

从式(6)可推出

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}。 \tag{7}$$

上式表明, N 维复厄米正定矩阵 $\mathbf{R}$ 求逆的问题可转化为 $2N$ 维实对称正定矩阵 $\mathbf{P}$ 的求逆, 即计算

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

3.2 改进的复正定厄米矩阵求逆算法

采用传统矩阵求逆算法, 通过将 N 阶复矩阵运算转换为 $2N$ 阶实矩阵, 扩大了矩阵维数。为降低运算量, 对复正定矩阵求逆进行改进。由于

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \\ &(\mathbf{A} + \mathbf{j}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1}, \quad (8) \end{aligned}$$

对公式(8)进行拆分变换如下, 可以得到

$$\begin{aligned} &(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \\ &(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1})[\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})]^{-1} = \\ &(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \\ &(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})[\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})\mathbf{B}]^{-1} = \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \\ &(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \quad (9) \end{aligned}$$

由此可以得出

$$\mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{j}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{j}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}. \quad (10)$$

则由公式(10)可见, 可以通过仅对 N 维实部矩阵求逆来获得复数矩阵 $\mathbf{R}^{-1}$ 。对公式(10)进行分解, 可以得到进行复正定厄米矩阵求逆需要如下几个步骤:

- (1) 先对实部 $\mathbf{A}$ 进行求逆得到 $\mathbf{A}^{-1}$;
- (2) 计算 $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$;
- (3) 计算 $\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{K}$, 由于 $\mathbf{A}$ 为实对称正定矩阵, $\mathbf{B}$ 为反实对称正定矩阵, 则 $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 仍为实对称正定矩阵;
- (4) 计算 $\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{S}$, 即由此获得 $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$, 对 $\mathbf{J}$ 进行矩阵求逆, 即 $\mathbf{L} = \mathbf{J}^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$;
- (5) 计算 $\mathbf{K} \times \mathbf{L}$, 即可获得 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$;
- (6) 由此可以获得 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{L} - \mathbf{j}\mathbf{K}\mathbf{L}$ 。

3.3 实对称正定矩阵的求逆方法

采用高斯消元法进行实正定矩阵求逆, 利用实对称正定特性, 仅对下三角矩阵进行求逆。下面给出 N 阶对称正定矩阵求逆的步骤:

- 步骤 1: 输入 N 阶对称矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$;
- 步骤 2: 对 $k = N, n-1, \dots, 1$ 执行如下循环操作:
- (1) 设 $p = a_{11}$, 若 $p \leq 0$ (矩阵不正定) 则停止计算, 给失败标志; 否则转下一步;
 - (2) 对 $i = 2, 3, \dots, n$ 执行 (a) ~ (d) 的循环操作:

- (a) $q = a_{i1}$ (暂存),
$$h_i = \begin{cases} -q/p, & i \leq k; \\ q/p, & i > k; \end{cases} \quad (11)$$
- (b) 对 $j = 2, 3, \dots, i$ 执行 $a_{i-1,j-1} = a_{ij} + q \cdot h_j$;
- (c) 对 $j = 2, 3, \dots, n$ 执行 $a_{n,j-1} = h_j$;
- (d) $a_{nn} = 1/p$ 。

4 硬件实现方案及仿真分析

4.1 硬件实现方案

在硬件设计实现中, 采用 FPGA 和 DSP 共同实现 SMI 抗干扰算法, 具体如图 2 所示。4 路 A/D 采样后的数据送给 FPGA 完成相关矩阵的运算后, 送给 DSP 进行复矩阵求逆运算法, 将计算得到的权值传递到 FPGA 中进行波束合成, 抗干扰后输出送给后端。

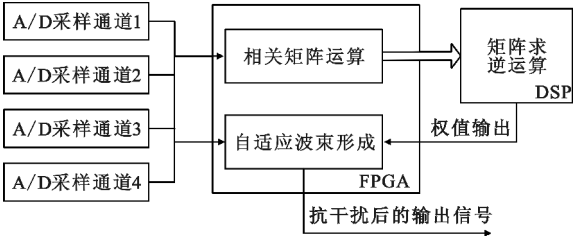


图2 硬件实现框图
Fig. 2 Hardware implementation diagram

考虑到在 DSP 中实现整个矩阵求逆运算, DSP 处理主要采用高速串行执行方式, 下面对各个环节计算的运算量进行详细分析。

4.2 实对称矩阵求逆运算量

由 3.3 节给出的实对称矩阵求逆在 DSP 中执行需要的乘法运算量为

$$N \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^i (j) = (N^3 - N^2)/2, \quad (12)$$

加法运算量为

$$N \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^i (j) = (N^3 - N^2)/2, \quad (13)$$

除法运算量为

$$N \sum_{n=2}^N (j) + N = N^2. \quad (14)$$

4.3 传统复矩阵求逆运算量

采用传统的复矩阵求逆方法需要进行 $2N$ 维矩阵的求逆运算, 则需要的乘法运算量为

$$((2N)^3 - (2N)^2)/2 = (4N^3 - 2N^2), \quad (15)$$

加法运算量为

$$((2N)^3-(2N)^2)/2=(4N^3-2N^2), \quad (16)$$

除法运算量为

$$(2N)^2=4N^2. \quad (17)$$

4.4 简化的复矩阵求逆算法运算量

对改进算法的矩阵求逆运算量进行分步计算如下:

- (1)先对实部 $\mathbf{A}$ 进行求逆得到 $\mathbf{A}^{-1}$, 实数矩阵求逆采用高斯消元法进行;
- (2)计算 $\mathbf{K}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, 由于 $\mathbf{A}^{-1}$ 为实对称矩阵, $\mathbf{B}$ 为反对称矩阵, 则进行矩阵乘法运算时仅需进行下三角元素的乘法运算, 以降低乘法运算量;
- (3)计算 $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, 由于 $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 计算后的结果为实对称矩阵, 则仅需进行下三角运算;
- (4)计算 $\mathbf{K}\times\mathbf{L}$, 由于矩阵相乘的结果为反对称矩阵, 同时考虑到对角线上的元素为 0, 则只需计算下三角矩阵的数值。

对每个步骤需要的加法、乘法和除法运算量进行统计, 如表 1 所示。

表 1 改进的矩阵复矩阵求逆运算量分析

Table 1 Improved complex matrix inversion computation analysis

计算量分析	乘法运算量	加法运算量	除法运算量
$\mathbf{A}^{-1}$	$(N^3-N^2)/2$	$(N^3-N^2)/2$	N^2
$\mathbf{K}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$	$(N^3+N^2)/2$	N^3	/
$\mathbf{S}=\mathbf{BK}$	$(N^3+N^2)/2$	$(N^3+N^2)/2$	/
$\mathbf{J}=\mathbf{A}+\mathbf{S}$	N/A	$(N^2+N)/2$	/
$\mathbf{L}=\mathbf{J}^{-1}$	$(N^3-N^2)/2$	$(N^3-N^2)/2$	N^2
$\mathbf{K}\times\mathbf{L}$	$(N^3-N^2)/2$	$(N^3-N^2)/2$	/
全部运算量	$(5N^3-N^2)/2$	$3N^3-N^2/2+N/2$	$2N^2$

4.5 运算量对比分析

根据 4.3 节和 4.4 节给出的运算量与矩阵维数 N 的关系可以看到, 改进后的矩阵求逆算法乘法、加法和除法运算量都有大幅度降低。除法运算量由 $4N^2$ 变为 $2N^2$, 运算量为改进前的 50%。为了更加清晰体现算法优势, 设置矩阵求逆的阶数从 4 阶变化到 60 阶, 给出了乘法和加法不同矩阵维数的运算量降低率曲线, 仿真分析了改进算法相对原算法的运算量降低率, 具体如图 3 和图 4 所示。由两幅曲线图可以看出, 改进的矩阵求逆算法乘法运算量为

改进前运算量的 62% ~ 68%, 改进后矩阵求逆的加法运算量为改进前算法运算量的 75% ~ 80%。该仿真环境设置基本能够真实体现在 DSP 硬件处理平台上运算量变化的真实情况。

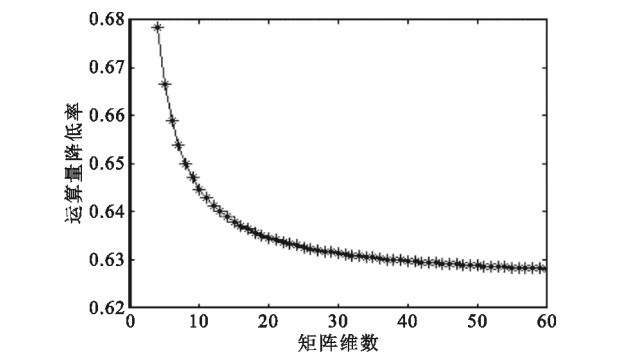


图 3 乘法运算量降低率曲线
Fig. 3 Decrease rate curve of multiplication computation

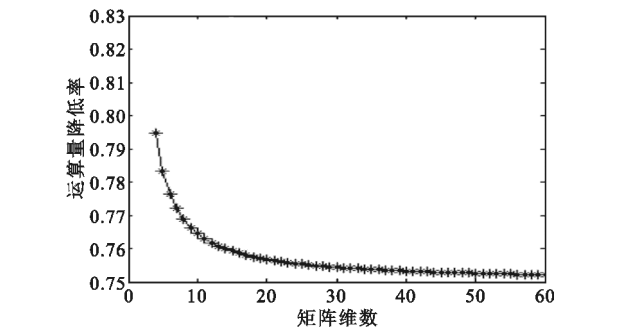


图 4 加法运算量降低率曲线
Fig. 4 Decrease rate curve of addition computation

5 结束语

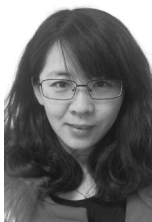
本文给出的简化的复正定厄米矩阵求逆算法建立在经典算法基础上, 将复正定厄米矩阵转换为实部矩阵的求逆运算来实现, 易于实现, 运算量低。本文基于 DSP 的硬件平台给出了串行执行算法的详细实现方式及仿真, 从分析结果来看, 改进的算法大大减少了运算量, 实时性好, 适用性广泛, 对雷达、电子对抗等数字信号处理领域的矩阵求逆同样适用。在此算法基础上, 利用对角加载等方式, 稳定可靠地将其应用于空时联合抗干扰的工程项目中将是未来研究的重点方向。

参考文献:

[1] 廖群, 郑建生, 黄超. GPS 自适应抗干扰算法及其 FP-GA 实现[J]. 现代雷达, 2006, 28(4): 79-81.
LIAO Qun, ZHENG Jiansheng, HUANG Chao. Realiza-

- tion of GPS Adaptive Anti-jamming Algorithm on FPGA [J]. Modern Radar, 2006, 28(4): 79-81. (in Chinese)
- [2] 幸璐璐. 一种基于简化极化敏感阵列的 APES 波束形成算法[J]. 电讯技术, 2014, 54(11): 1505-1509.
- XING Lulu. An APES Beam-forming Algorithm Based on Simplified Polarization Sensitive Array [J]. Telecommunication Engineering, 2014, 54(11): 1505-1509. (in Chinese)
- [3] Frost O L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing [J]. Proceedings of the IEEE, 1972, 60(8): 926-935.
- [4] 段彬. 基于 QR 分解的卫星导航系统干扰抑制方法与 DSP 设计[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.
- DUAN Bin. Interference Suppression Methods for Satellite Navigation System and its DSP Design [D]. Xi'an: Xidian University, 2012. (in Chinese)
- [5] 任磊, 王永良, 陈辉, 等. 基于 DSP 的 SMI 方法快速实现研究[J]. 国防科技大学学报, 2009, 31(3): 53-59.
- REN Lei, WANG Yongliang, CHEN Hui, et al. Research on Fast Implementation of SMI Method Based on DSP [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2009, 31(3): 53-59. (in Chinese)
- [6] 高飞, 王永良, 陈辉, 等. STAP 中的矩阵求逆问题研究 [J]. 雷达科学与技术, 2008, 6(3): 215-218.
- GAO Fei, WANG Yongliang, CHEN Hui, et al. Study on Matrix Inversion for STAP [J]. Radar Science and Technology, 2008, 6(3): 215-218. (in Chinese)
- [7] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- ZHANG Xianda. Matrix Analysis and Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)

作者简介:



董李梅(1982—), 女, 吉林长春人, 2007 年于哈尔滨工程大学获硕士学位, 现为工程师, 主要研究方向为卫星导航接收机抗干扰处理。

DONG Limei was born in Changchun, Jilin Province, in 1982. She received the M. S degree from Harbin Engineering University in 2007. She is now an engineer. Her research concerns satellite navigation receiver anti-jamming processing.

Email: donglimei@126.com