

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2014.11.014

引用格式:党骅,马林华,田雨,等.改进的一比特量化压缩感知重建算法[J].电讯技术,2014,54(11):1534-1537. [DANG Kui, MA Lin-hua, TIAN Yu, et al. An Improved 1-bit Compressive Sensing Reconstruction Algorithm[J]. Telecommunication Engineering, 2014, 54(11): 1534-1537.]

改进的一比特量化压缩感知重建算法*

党 骅^{1,2,**}, 马林华^{1,2}, 田 雨¹, 孙玉雪³, 茹 乐¹

(1. 空军工程大学 航空航天工程学院, 西安 710038; 2. 西安电子科技大学 综合业务网理论及关键技术国家重点实验室, 西安 710071; 3. 空军工程大学 信息与导航学院, 西安 710077)

摘 要:传统的压缩感知理论考虑的测量值均是实值的,具有无限比特精度。然而在实际应用中,由于数据存储或传输需求,必须考虑测量值的量化问题。通过研究总结已有的一比特量化压缩感知(1-bit Quantized Compressive Sensing)重建算法,提出了一种改进的二进制迭代硬阈值(BIHT)算法。该算法通过引入回溯筛选的思想,在每一步迭代过程中优化了对原子的选择。实验仿真表明,在采样比特数较低时,基于回溯的二进制迭代硬阈值(BBIHT)算法比二进制迭代硬阈值算法重建精度高2~3 dB,且重建速度快。因此,BBIHT算法更有实际应用意义。

关键词:压缩感知;一比特量化;重建算法

中图分类号:TN911.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2014)11-1534-04

An Improved 1-bit Compressive Sensing Reconstruction Algorithm

DANG Kui^{1,2}, MA Lin-hua^{1,2}, TIAN Yu¹, SUN Yu-xue³, RU Le¹

(1. School of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China;
2. The State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China;
3. School of Information and Navigation, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: The classic compressive sensing (CS) theory assumes the measurements to be real-valued and have infinite bit precision. But in practice, quantization of measurements should be taken into consideration because of the data storage demand or transmission demand. Based on the research and summarization of the existing 1-bit Quantized Compressive Sensing reconstruction algorithms, an improved Binary Iterative Hard Thresholding (BIHT) algorithm is presented. This algorithm optimizes the choice of atoms in each iteration by adding the idea of backtracking. The simulation results show that the reconstruction precision of Backtracking Binary Iterative Hard Thresholding (BBIHT) is 2~3 dB higher than that of BIHT algorithm when the sample bits are not many, besides the reconstruction speed is higher than that of BIHT. So BBIHT is much more efficient and practical.

Key words: compressive sensing; 1-bit quantization; reconstruction algorithm

1 引 言

压缩感知理论指出,通过适当的方法,稀疏信号或可压缩信号可以从其线性欠采样测量中精确重建

出来^[1-2]。目前大多数的研究所考虑的测量值都是实值的,具有无限比特精度。然而,在实际处理中,需要将采集到的测量值进行量化,以确保能够将数

* 收稿日期:2014-04-24;修回日期:2014-06-09 Received date:2014-04-24;Revised date:2014-06-09

基金项目:武器装备预研基金项目(9140A25031112JB32001);综合业务网理论及关键技术国家重点实验室(西安电子科技大学)开放研究课题(ISN15-13)

Foundation Item: The Project of National Defense Weapon Research Foundation(9140A25031112JB32001);The State Key Laboratory of Integrated Services Networks(Xidian University) Open Research Project(ISN15-13)

** 通讯作者:dk_npc1990@163.com Corresponding author:dk_npc1990@163.com

据进行存储和传输,即将实值测量值映射为有限域上的离散值^[3]。例如,在均匀量化中,将测量值量化至 2^B 个离散值, B 表示量化比特数。量化是不可逆的,在量化过程中会引入量化误差,通常将量化误差看作加性噪声来处理。近年来,一些学者研究了测量值的量化问题,并提出了相关重建方法^[4-5]。

Boufounos 和 Baraniuk 在文献[6]中指出,将测量值用一个比特表示,即只保留测量值的符号,仍然可以精确稳定地重建原始信号。采用这种量化方式可以大大降低信号在传输和存储过程中的比特数,在多数情况下,目标是减少总的比特数和非测量数。并且在许多情况下,量化消耗远大于采样消耗,而 1-bit 压缩感知在量化过程中只需要一个比较器就可以实现高速稳定的量化。

目前,基于 1-bit 压缩感知的重建算法主要有符号匹配追踪算法 (Matching Sign Pursuit, MSP)^[7]、约束步长收缩算法 (Restricted-step Shrinkage, RSS)^[8]、二进制迭代硬阈值算法 (BIHT)^[9] 等,其中 BIHT 算法比其他算法在重建精度和重建一致性上都要高。

本文正是在 BIHT 算法的基础上,在每一步迭代过程中引入回溯^[10]筛选的步骤,提出了基于回溯的二进制迭代硬阈值算法 (BBIHT),该算法在每次迭代过程中,将前后两次迭代的支撑集合并,再在合并的支撑集下一致性重建。回溯步骤的加入优化了迭代过程中支撑的选择,避免了同一原子在前后两次迭代中被反复筛选和删除,降低了算法的重建复杂度。实验仿真表明,在较低采样比特数下,BBIHT 算法比 BIHT 算法重建精度要高,重建速度要快。

2 1-bit 压缩感知理论

在传统的压缩感知中,将信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 与测量矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N} (M \ll N)$ 做内积得到线性测量值

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
 (1)

其中, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, 当测量矩阵满足一定条件,就可以通过适当的方法从测量值重建出原始信号。

1-bit 压缩感知是考虑对测量值量化的一种极限情况,表示为

$$\mathbf{y} = \text{sign}(\mathbf{A}\mathbf{x})$$
 (2)

其中, $\text{sign}(\cdot)$ 表示符号函数,当测量值为正时取值为+1 否则为-1; M 表示测量值的数目,而在 1-bit 量化中,测量数即比特数。为了得到更高的重建精度,可以增加 M 值的大小,甚至可以大于信号长度 N 。

一致性重建定义^[11]如下:
对于映射 $f: X \rightarrow Y, x \in X, y = f(x)$, 如果 $f(\hat{x}) = y$,

那么 $\hat{x} \in X$ 为 y 到 x 的一致性估计。
在 1-bit 压缩感知中,一致性重建要求估计值 $\hat{x}$ 与测量系统得到的测量值具有相同的符号,即量化的测量值与原始测量值的乘积非负:

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$$
 (3)

其中, $\mathbf{Y} = \text{diag}(\mathbf{y})$, 即量化后的测量值构成的对角矩阵。

由于 1-bit 量化使得信号幅度信息丢失,因此对信号增加一个能量约束,使重构信号在单位超球面上:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2} = 1$$
 (4)

这一约束使得求解空间缩小,提高了重建精度。

3 算法设计

3.1 二进制迭代硬阈值算法

为了从 1-bit 测量中重建出原始信号,文献[9]给出 BIHT 算法所求解问题为

$$\begin{aligned} \min_x \sum_{i=1}^M \phi(y_i, (\mathbf{A}\mathbf{x})_i) \\ \text{subject to: } \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \|\mathbf{x}\|_0 \leq K \end{aligned}$$
 (5)

其中,

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 0, & x \cdot y > 0 \\ |x \cdot y|, & \text{otherwise} \end{cases}$$
 (6)

BIHT 算法步骤如下:

- 步骤 1: 初始化,最大迭代次数 $n_{\max}$, 迭代次数 $n=0, \mathbf{x}^0=0$, 稀疏度 K ;
- 步骤 2: 计算 $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \frac{\mu}{2} \mathbf{A}^T (\mathbf{y} - \text{sign}(\mathbf{x}^n))$;
- 步骤 3: 计算 $\mathbf{x}^{n+1} = \eta_K(\mathbf{a}^{n+1})$, 并令 $n=n+1$;
- 步骤 4: 当 $n = n_{\max}$ 或 $\mathbf{y} - \text{sign}(\mathbf{x}) = 0$ 时输出 $\mathbf{x}^{n+1} / \|\mathbf{x}^{n+1}\|$, 否则转步骤 2。

其中, μ 为标量,用来控制梯度下降步长的大小,函数 $\eta_K(v)$ 用来保留 v 中最大的 K 个量并将其余量置零。

3.2 基于回溯的二进制迭代硬阈值算法

本文受到文献[10]中对支撑进行回溯筛选的启发,将回溯的方法引入 BIHT 算法中,在每次迭代过程中,将前后两次迭代的支撑进行合并,并在该支撑下一致性重建,即在该支撑下最小化

$$\|\text{neg}(\mathbf{Y}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})\|_2$$
 (7)

其中, $\text{neg}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - |\mathbf{x}|)/2$, 即只保留 $\mathbf{x}$ 中负元素,其余部分置零。当 $\hat{\mathbf{x}}$ 与 $\mathbf{x}$ 相一致时,式(7)的值为零。

BBIHT 具体算法步骤如下:

- 步骤 1: 初始化,最大迭代次数 $n_{\max}$, 迭代次数 $n=0, \mathbf{x}^0=0$, 稀疏度 K ;

步骤 2: 计算 $\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{A}^T (\boldsymbol{y} - \text{sign}(\boldsymbol{x}^n))$;

步骤 3: 计算 $\boldsymbol{c}^{n+1} = \eta_K(\boldsymbol{a}^{n+1})$, 合并前后两次迭代支撑 $\Gamma_n = \text{supp}(\boldsymbol{c}^{n+1}) \cup \text{supp}(\boldsymbol{x}^n)$;

步骤 4: 在支撑集下一致性重建

$\boldsymbol{b}^n|_{\Gamma_n} = \underset{\boldsymbol{x}}{\text{argmin}} \|\text{neg}(\boldsymbol{Y} \boldsymbol{A} \hat{\boldsymbol{x}})\|_2^2 \text{ s. t. } \|\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 = 1$;

步骤 5: 当 $n = n_{\max}$ 或 $\|\text{neg}(\boldsymbol{Y} \boldsymbol{A} \hat{\boldsymbol{x}})\|_2 = 0$ 时, 输出 $\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{b}^n|_K / \|\boldsymbol{b}^n|_K\|_2$, 否则转步骤 2。

通过对比研究 BIHT 算法和 BBIHT 算法发现, 在 BIHT 算法迭代过程中, 不断将信号残差投影到测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列构成的原子库中最匹配的 K 个原子, 确定 K 个可信赖的候选, 当认为所选列是可信赖的, 则将其加入下一次迭代序列。由于这种方式缺乏 $\boldsymbol{A}$ 各列之间的正交性而不是最优的, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的某个支撑可能由于不在信赖候选集内而被丢弃, 但是在下一次的迭代中又因为加入残差投影, 又被选入到可信赖的支撑集内, 因此可能产生 $\boldsymbol{a}$ 的某个支撑被反复丢弃和保留, 从而导致整个算法需要迭代较多次数才能达到较高重建精度。

而 BBIHT 算法通过加入回溯步骤, 使同一原子被反复选择和丢弃的概率大大降低, 通过在合并的支撑上一致性重建, 提高了信号的重建精度和重建速度。本文算法所用思想与文献[10]中基本相同, 然而算法实现时文献[10]采用最小二乘的方式, 而本文算法是根据一致性原理进行重建, 且两种算法针对问题不同, 本文算法是考虑量化情况下的重建算法, 因此也更加具有实际中的存储传输意义。

4 实验仿真及分析

在文献[9]中 BIHT 算法已经与其他算法进行了对比, 因此本文只用 BBIHT 算法与 BIHT 算法进行对比, 并且设定与该文献相同的实验条件。原始待采样信号 $\boldsymbol{x}$ 长度为 N , 稀疏度为 K 且非零值在单位球上随机取值, 即满足 $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$, 测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 采用大小为 $M \times N$ 的高斯随机测量矩阵。定义重构误差为 $SNR_{\text{rec}} = 10 \lg(\|\boldsymbol{x}\|_2 / \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_2)$, 角度误差 (Angular Error) 为 $\arccos\langle \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}} \rangle / \pi$, 且均为 1 000 次实验的平均值。

设定信号长度 $N = 1\,000$, 稀疏度 $K = 10$, 采样率 M/N 在区间 $[0, 2]$ 上取值 (当 $M/N > 1$ 时所获得测量值将大于原始信号的长度, 这在传统的压缩感知中是不存在的, 然而在 1-bit 压缩感知中关注的是总的比特数而非测量值数, 因此 $M/N > 1$ 的情况在 1-bit 压缩感知中是常见的) 所得 BBIHT 与 BIHT 重构误差对比如图 1 所示, 重建时间对比如图 2 所示,

角度误差对比如图 3 所示。

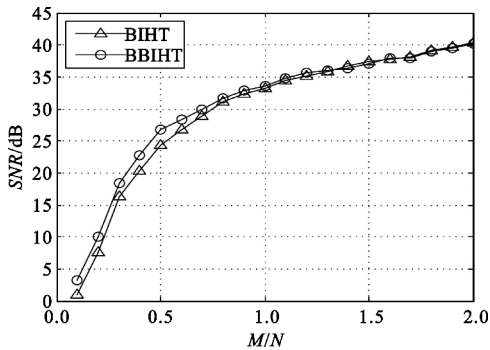


图 1 BBIHT 与 BIHT 重建误差对比
Fig. 1 Reconstruction error between BBIHT and BIHT

由图 1 可以看出, 采样率在 0.7 以下时, BBIHT 的重建精度比 BIHT 的要高约 2 ~ 3 dB, 在大于 0.7 时两种算法的重建精度基本趋于相同, 采样率大于 1.2 时两者的重建精度基本一致。

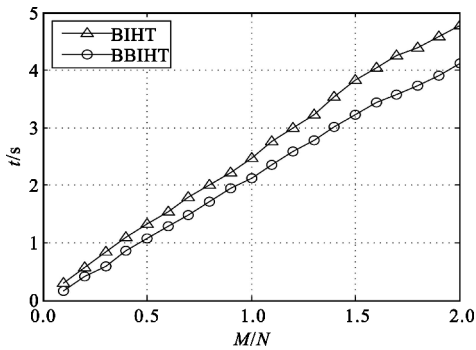


图 2 BBIHT 与 BIHT 重建时间对比
Fig. 2 Reconstruction time between BBIHT and BIHT

从图 2 时间曲线可以看出, 在相同条件下 BBIHT 算法的重建速度要高于 BIHT 算法; 两者时间开销大致随着采样率的增加呈线性升高趋势, 且 BIHT 算法的重建时间曲线斜率略大于 BBIHT 算法时间曲线, 因而随着采样率增加, BBIHT 算法的时间开销增长速度略慢于 BBIHT 算法。

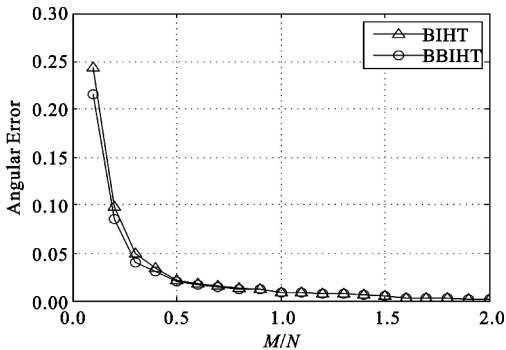


图 3 BBIHT 与 BIHT 重建角度误差对比
Fig. 3 Reconstruction angular error between BBIHT and BIHT

由图 3 可以看出,在采样率小于 0.6 时,采用 BBIHT 算法重建信号所得角度误差稍小于 BIHT 算法,当采样率大于 0.6 时,两者的重建角度误差基本相同,说明了本文所提算法的重建一致性要高于 BIHT 算法。

5 结 论

本文对 BIHT 算法迭代过程中可能产生原子被反复筛选和丢弃的情况进行分析,并通过引入原子的回溯筛选思想,提出了基于回溯的 BIHT 算法。通过这种方法,大大降低了同一原子在前后两次迭代过程中被反复筛选和删除的概率,降低了算法的重建复杂度。通过仿真实验可以看出,本文所提算法在采样率较低时(低于 0.7)的重建精度比 BIHT 算法高出约 2~3 dB,达到重建精度所需时间略低于 BIHT 算法,重建一致性也高于 BIHT 算法,说明本文算法比 BIHT 算法更具有实际应用意义。本文实验结果均是通过大量样本得到的平均值,实验中并无例外情况。下一步还应更加深入地进行数学分析,使算法在理论上更加完善。

参考文献:

- [1] 邵文泽,韦志辉. 压缩感知基本理论:回顾与展望[J]. 中国图像图形学报,2012,17(1):1-12.
SHAO Wen-ze, WEI Zhi-hui. Advances and perspectives on compressed sensing theory [J]. Journal of Image and Graphics, 2012, 17(1):1-12. (in Chinese)
- [2] 乔田田,张宇,李维国. 一种基于压缩感知的信号重建新算法[J]. 电讯技术,2013,53(10):1289-1292.
QIAO Tian-tian, ZHANG Yu, LI Wei-guo. A New Signal Reconstruction Algorithm Based on Compressed Sensing [J]. Telecommunication Engineering, 2013, 53(10):1289-1292. (in Chinese)
- [3] Boufounos P T, Jacques L. Quantization and Compressive Sensing [EB/OL]. [2014-05-07]. <http://arxiv.org/abs/1405.1194>.
- [4] Zymnis A, Boyd S, Candes E. Compressed sensing with quantized measurements [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 17(2):149-152.
- [5] Laska J N, Boufounos P T, Davenport M A, et al. Democracy in action: Quantization, saturation, and compressive sensing [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2011, 31(3):429-443.
- [6] Boufounos P T, Baraniuk R G. 1-bit compressive sensing [C]//Proceedings of 2008 42nd Annual Conference on Information Science and Systems. Princeton, NJ: IEEE, 2008:16-21.
- [7] Boufounos P T. Greedy sparse signal reconstruction from

sign measurements [C]// Proceedings of the 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009:1305-1309.

- [8] Laska J N, Wen Z, Yin W, et al. Trust, but verify: Fast and accurate signal recovery from 1-bit compressive measurement [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(11):5289-5301.
- [9] Jacques L, Laska J N, Boufounos P T, et al. Robust 1-bit compressive sensing via binary stable embeddings of sparse vectors [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(4):2082-2102.
- [10] 杨海蓉,方红,张成,等. 基于回溯的迭代硬阈值算法[J]. 自动化学报,2011,37(3):276-282.
YANG Hai-rong, FANG Hong, ZHANG Cheng, et al. Iterative Hard Thresholding Algorithm Based on Backtracking [J]. ACTA Automatica Sinica, 2011, 37(3):276-282. (in Chinese)
- [11] 肖涛,马社祥. 一比特压缩传感的贪婪重构算法[J]. 科学技术与工程,2012,12(34):9182-9185.
XIAO Tao, MA She-xiang. Greedy Reconstruction Algorithm of One-bit Compressed Sensing [J]. Science Technology and Engineering, 2012, 12(34):9182-9185. (in Chinese)

作者简介:



党 骥(1990—),男,陕西三原人,硕士研究生,主要研究方向为压缩感知;

DANG Kui was born in Sanyuan, Shaanxi Province, in 1990. He is now a graduate student. His research direction is compressive sensing.

Email:dk_npc1990@163.com

马林华(1965—),男,陕西汉中人,教授、博士生导师,主要研究方向为编码理论、抗干扰通信、网络组网通信;

MA Lin-hua was born in Hanzhong, Shaanxi Province, in 1965. He is now a professor and also the Ph. D. supervisor. His research interests include error control coding, anti-interference communication and networks communication.

田 雨(1986—),男,山东济南人,博士研究生,主要研究方向为 LDPC 快速编译码及 FPGA 实现、自组织网络;

TIAN Yu was born in Ji'nan, Shandong Province, in 1986. He is now working toward the Ph. D. degree. His research concerns LDPC codes and Ad Hoc network.

孙玉雪(1991—),女,山东威海人,主要研究方向为 LDPC 快速编译码;

SUN Yu-xue was born in Weihai, Shandong Province, in 1991. Her research concerns LDPC codes.

茹 乐(1979—),男,河南信阳人,博士,副教授,主要研究方向为编码理论、自组织网络。

RU Le was born in Xinyang, Henan Province, in 1979. He received the Ph. D. degree in 2007. He is now an associate professor. His research concerns coding and Ad Hoc network.