

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2014.10.005

引用格式:李明阳,彭卫东,柏鹏,等.基于交织的二元及四元完备序列和序列偶的构造方法[J].电讯技术,2014,54(10):1339-1343. [LI Ming-yang,PENG Wei-dong,BAI Peng,et al. Construction of Binary and Quaternary Perfect Sequences and Sequence Pairs Based on Interleaving Technique[J]. Telecommunication Engineering,2014,54(10):1339-1343.]

基于交织的二元及四元完备序列和序列偶的构造方法^{*}

李明阳^{1,2,**},彭卫东²,柏 鹏²,李淑婧²,王晟达³

(1. 空军工程大学 装备管理与安全工程学院,西安 710051;
2. 空军工程大学 综合电子信息系统与电子对抗技术研究中心,西安 710051;
3. 空军工程大学 航空航天工程学院,西安 710038)

摘 要:基于交织技术,提出了三类二元及四元完备序列和序列偶的构造方法。分别利用二元完备序列、二元完备互补序列对和二元完备序列偶作为初始序列,通过合理设计带符号移位序列,基于交织获得了不同的二元及四元完备序列和序列偶。这些构造方法均可不断递归地进行,从而获得更多具有新参数的完备序列及完备序列偶。该方法通过引入带符号的移位序列,在一定程度上改善了目标序列的相关性能,为序列的构造提供了新的思路。

关键词:序列构造;交织技术;完备序列;互补序列;序列偶

中图分类号:TN911.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2014)10-1339-05

Construction of Binary and Quaternary Perfect Sequences and Sequence Pairs Based on Interleaving Technique

LI Ming-yang^{1,2},PENG Wei-dong²,BAI Peng²,LI Shu-jing²,WANG Sheng-da³

(1. Equipment Management and Safety Engineering College,Air Force Engineering University,Xi'an 710051,China;
2. Synthetic Electronic Information System and Electronic Countermeasure Technology Research Department,
Air Force Engineering University,Xi'an 710051,China; 3. Aeronautics and Astronautics Engineering College,
Air Force Engineering University,Xi'an 710038,China)

Abstract:Based on interleaving technique,three constructions of binary and quaternary perfect sequences are presented. By relatively employing binary perfect sequence,binary complete complementary sequence mate and binary perfect sequence pair,through properly designing signed shift sequence,various binary and quaternary perfect sequences and sequence pairs are generated based on interleaving. These constructions can be recursively processed to achieve more perfect sequences and perfect sequence pairs with novel parameters. By introducing singed shift sequence,correlation performance of the resultant sequence is improved in a certain extent,which offers a new approach of sequence construction.

Key words:sequence construction;perfect sequence;complementary sequence;sequence pair;interleaving technique

1 引 言

二元相移键控(Binary Phase Shift Keying,BPSK)和四元相移键控(Quaternary Phase Shift Keying,QPSK)调制在通信系统中得到广泛应用,研究

^{*} 收稿日期:2014-04-01;修回日期:2014-05-28 Received date:2014-04-01;Revised date:2014-05-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61174194)
Foundation Item:The Natioanl Natural Science Foundation of China(No. 61174194)

^{**} 通讯作者:wo.lmy@163.com **Corresponding author:**wo.lmy@163.com

具有优良相关特性的二元及四元序列具有重要的意义。零相关区(Zero Correlation Zone,ZCZ)序列是一类适合准同步码分多址(Quasi Synchronous Code Division Multiple Address, QS-CDMA)通信系统的好码,能够克服传统 CDMA 要求完全同步的缺点并能获得较大的容量。交织方法是一种构造 ZCZ 序列集的有效手段,包括序列自交织和序列间交织两种情况。文献[1-2]提出几类利用最佳序列构造最优或接近最优性的 ZCZ 序列集的方法,文献[3]基于交织构造了具有零碰撞区的跳频序列,这些构造方法的核心是移位序列的构造。ZCZ 序列应用的前提是系统已经同步或者接近同步^[4-5],而完备序列因其不受零相关区的限制使其在定位、同步中具有重要的应用价值。不同于二元完备序列受数量和长度的严格限制,四元完备序列和二元、四元完备序列偶等可以有较多的数量和灵活的长度。

移位序列是交织构造方法的核心,相对于传统的交织方法,本文提出将移位序列引入符号并进行交织的方法。基于提出的带符号移位序列和交织技术,通过对不同参数条件下设计合理的带符号移位序列,构造了三类完备二元及四元序列及序列偶。本文提出的方法还可以不断递归,每次递归运算将序列长度扩大 2 倍,从而能够获得更多不同长度的完备序列。

2 基本定义与定理

定义 1 设 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_{L-1})$ 是周期为 L 的序列,其周期自相关函数(Auto Correlation Function, ACF)定义为

$$R_{a,b}(t)=\sum_{i=0}^{L-1}a_i b_{(i+t)\bmod L}^* \tag{1}$$

定义 2 设 a 是周期为 L 的序列,如果 a 的 ACF 满足式(2),则称其为完备序列。

$$R_a(t)=\begin{cases} C>0, & t=0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

定义 3 设由 N 个周期为 L 的序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}$ 得到周期为 NL 的序列 $b=I(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$,其中 $b_{jN+i}=a_{i,j}$,则称 $I(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$ 为序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}$ 的交织运算。

定义 4 设 a 是周期为 L 的序列, $e=(e_0,e_1,\cdots,e_{N-1})$ 是周期为 N 的移位序列,且 $-L+1\leq e_i\leq L-1$,称 e 为符号移位序列。定义 a 关于 e_i 的有符号移位为 $LS_{e_i}(a)=\text{sign}(e_i)\cdot L_{\text{abs}(e_i)}(a)$ 。特别地,令

$LS_{-0}(a)=-a$ 。其中, $L_x(a)=(a_x,a_{x+1},\cdots,a_{L-1},a_0,\cdots,a_{x-1})$,表示序列 a 左移 x 位后的序列, $\text{sign}(x)$ 表示取 x 的符号, $\text{abs}(x)$ 表示取 x 的绝对值。

引理 1^[6] 设 a 是两个周期 L 的序列,移位序列 $e=(e_0,e_1,\cdots,e_{N-1})$,且 $e_i\geq 0$ 。定义交织序列 u 为

$$u=I(L_{e_0}(a),L_{e_1}(a),\cdots,L_{e_{N-1}}(a)) \tag{3}$$

令 $\tau=N\tau_1+\tau_2,0\leq\tau_2<N$,则序列 u 的 ACF 满足

$$R_u(\tau)=\sum_{i=0}^{N-\tau_2-1}R_a(e_{i+\tau_2}-e_i+\tau_1)+\sum_{i=N-\tau_2}^{N-1}R_a(e_{i+\tau_2-N}-e_i+\tau_1+1) \tag{4}$$

定理 1 设 x,y 是两个周期为 L 的序列,令两个周期为 $2L$ 的序列 $z_0=I(x,y),z_1=I(x,-y)$,则 z_0,z_1 的 ACF 满足

$$\begin{aligned} R_{z_0,z_0}(2\tau)&=R_{x,x}(\tau)+R_{y,y}(\tau) \\ R_{z_0,z_0}(2\tau+1)&=R_{x,y}(\tau)+R_{y,x}(\tau+1) \\ R_{z_1,z_1}(2\tau)&=R_{x,x}(\tau)+R_{y,y}(\tau) \\ R_{z_1,z_1}(2\tau+1)&=-R_{x,y}(\tau)-R_{y,x}(\tau+1) \end{aligned} \tag{5}$$

证明 在相对移位为 $2\tau+1$ 时,序列 z_1 的自相关函数满足

$$\begin{aligned} R_{z_1,z_1}(2\tau+1)&=\sum_{i=0}^{2L-1}z_{1,i}z_{1,i+2\tau+1}= \\ &=\sum_{j=0}^{L-1}z_{1,2j}z_{1,2j+2\tau+1}+\sum_{j=0}^{L-1}z_{1,2j+1}z_{1,2j+1+2\tau+1}= \\ &=\sum_{j=0}^{L-1}x_j(-y_{j+\tau})+\sum_{j=0}^{L-1}(-y_j)x_{j+1+\tau}= \\ &=-R_{x,y}(\tau)-R_{y,x}(\tau+1) \end{aligned} \tag{6}$$

式(5)证明了序列 z_1 在相对移位为 $2\tau+1$ 时 ACF 的性质,式(4)的其余部分证明过程与此类似。证毕。

3 构造方法

3.1 由二元完备序列构造四元完备序列

基于二元完备序列 $a=(+++-)$,本节给出两种运用带符号移位序列和交织技术构造四元完备序列的方法。

3.1.1 方法 1 的构造步骤

(1)当 $i=0$ 时,利用二元完备序列 $a=(+++-)$ 构造四元序列 $b^0=b_l^0+jb_q^0$,其中 $b_l^0=I(a,a),b_q^0=I(a,-a)$ 。

(2)当 $i>0$ 时,通过递归不断生成 $b^i=b_l^i+jb_q^i$,其中 $b_l^i=I(b_l^{i-1},b_q^{i-1}),b_q^i=I(b_l^{i-1},-b_q^{i-1})$ 。

定理 2 方法 1 构造生成的 $b^i=b_l^i+jb_q^i$ 为四元

完备序列。

证明 根据完备序列的性质和定理 1 可得 b^0 的 ACF 满足

$$R_{b^0}(t) = R_{b^0_q}(t) + R_{b^0_l}(t) = \begin{cases} 4R_a(\tau), t=2\tau \\ 0, t=2\tau+1 \end{cases} = \begin{cases} 16, t=0 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

第 i 步, b^i 的 ACF 满足

$$R_{b^i}(t) = R_{b^i_j}(t) + R_{b^i_l}(t) = \begin{cases} 2R_{b^{i-1}}(\tau), t=2\tau \\ 0, t=2\tau+1 \end{cases} \quad (8)$$

可以由式(7)、(8)综合得到

$$R_{b^i}(t) = R_{b^i_j}(t) + R_{b^i_l}(t) = \begin{cases} 2^{i+4}, t=0 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

由定义 2, 序列 b^i 为四元完备序列。证毕。

3.1.2 方法 2 的构造步骤

(1) 当 $i=0$ 时, 利用 4 个带符号移位序列 $e_s = \{(-0\ 1\ 2\ 3), (0\ -1\ 2\ 3), (0\ 1\ -2\ 3), (0\ 1\ 2\ -3)\}$, 由二元完备序列 $a = (++++)$ 经过交织分别生成 16 位四元序列 (b_0, b_1, b_2, b_3) 。从 (b_0, b_3) 、 (b_1, b_2) 中任取一个分别作为四元序列的 I、Q 两路序列。

(2) 当 $i>0$ 时, 通过递归不断生成 $b^i = b^i_l + jb^i_q$, 其中 $b^i_l = I(b^{i-1}_l, b^{i-1}_q)$, $b^i_q = I(b^{i-1}_l, -b^{i-1}_q)$ 。

定理 3 方法 2 构造生成的 $b^i = b^i_l + jb^i_q$ 为四元完备序列。

证明 设序列 a 经过 $e = (0\ 1\ 2\ 3)$ 后生成的序列为 $b = I(a, L_1(a), L_2(a), L_3(b))$ 。根据引理 1 可知序列 b 的 ACF 为

$$R_b(\tau) = (N - \tau_2) R_a(\tau_2 + \tau_1) + \tau_2 R_a(\tau_2 - N + \tau_1 + 1)$$

由 a 为完备序列可知当 $(\tau_1 + \tau_2) \bmod N = 0$ 时 $R_b(\tau) = (N - \tau_2) R_a(0)$, 在 $(\tau_1 + \tau_2 - N + 1) \bmod N = 0$ 时 $R_b(\tau) = \tau_2 R_a(0)$, 其余情况始终有 $R_b(\tau) = 0$, 其 ACF 分布为

$$R_b(\tau) = \begin{cases} 16, \tau=0 \\ 12, \tau=3, 13 \\ 8, \tau=6, 10 \\ 4, \tau=7, 9 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

假设移位序列的负号在第 k 位元素, 则根据引理 1 和定义 2 可知序列 a 交织后受负号影响的位置必须满足

$$(\tau_2 + \tau_1) \bmod N = 0 \text{ and } (i=k \text{ or } (i + \tau_2) \bmod N = k) \quad (11a)$$

$$(\tau_2 + \tau_1 + 1) \bmod N = 0 \text{ and } (i=k \text{ or } (i + \tau_2 - N) \bmod N = k) \quad (11b)$$

如果式(11)有 x 个解, 则第 k 个序列的 ACF 为 $R_{b_k}(\tau) = R_b(\tau) - 2xR_a(\tau)$ 。易知, 当 $\tau \bmod N \neq 0$ 时, 4 个序列的 ACF 相互关系为 $R_{b_0}(\tau) = R_{b_3}(\tau) = -R_{b_1}(\tau) = -R_{b_2}(\tau)$ 。

序列 (b_0, b_3) 和 (b_1, b_2) 在非 0 点延迟处的相关值符号相反, 所以组成的四元序列的 ACF 除 0 点外始终为 0, 即 b 为完备四元序列(2)的证明类似于方法 1。证毕。

3.2 由二元完备互补序列对构造四元完备序列

基于二元完备互补序列对, 本小节给出一种运用带符号移位序列和交织技术构造四元完备序列的方法。

(1) 令二元完备互补序列对表示为 (b_l, b_q) , 当 $i=0$ 时, 将 b_l, b_q 分别作为四元序列的 I、Q 两路, 构造 $b^0 = b^0_l + jb^0_q = b_l + jb_q$ 。

(2) 当 $i>0$ 时, 通过递归不断生成 $b^i = b^i_l + jb^i_q$, 其中 $b^i_l = I(b^{i-1}_l, b^{i-1}_q)$, $b^i_q = I(b^{i-1}_l, -b^{i-1}_q)$ 。

定理 4 该方法构造生成的 $b^i = b^i_l + jb^i_q$ 为四元完备序列。

证明 根据完备互补序列的定义可知, 完备互补序列的两个子序列分别作为四元序列的 I、Q 两路即可构成四元完备序列。(2)的证明类似于定理 2。证毕。

3.3 二元及四元完备序列偶构造方法

基于二元完备序列偶, 本小节给出运用带符号移位序列和交织技术构造二元及四元完备序列偶的方法。

3.3.1 二元完备序列偶的构造方法

对于周期为 L 的二元完备序列偶 $a = \{a_x, a_y\}$, 且 $\gcd(L, 4) = 1$, 选取移位序列 $e = (e_0, e_1, e_2, e_3)$, $e_i = \pm i/4 \bmod L$, 交织生成序列偶 $c = \{c_x, c_y\}$, $c_x = I(a_x, L_1(a_x), L_2(a_x), L_3(a_x))$, $c_y = I(a_y, L_1(a_y), L_2(a_y), L_3(a_y))$ 。其中, $\gcd(x, y)$ 表示 x 和 y 的最大公约数。

定理 5 当且仅当 e 中存在一位负数时, 序列偶 c 为二元完备序列偶。

证明 假设 e 中不存在负号时交织后得到序列偶为 b , 其 ACF 满足

$$R_b(\tau) = \sum_{i=0}^{N-\tau_2-1} R_a(e_{i+\tau_2}-e_i+\tau_1) + \sum_{i=\tau_2}^{N-1} R_a(e_{i+\tau_2-N}-e_i+\tau_1+1) \quad (12)$$

将 $e_i = (i/4) \bmod L$ 代入到式 (12) 可得 $R_b(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} [R_a((\tau/4) \bmod L)]$ 。当 $0 < \tau \leq L-1$ 时, 应为 $\gcd(4, L) = 1$, 故 $\tau/4 \neq 0$, 此时 $R_b(\tau) = 0$; 当 $\tau = 0$ 时, $R_b(0) = \sum_{i=0}^{N-1} R_a(0) = 4R_a(0)$ 。

由于 $\gcd(4, L) = 1$, 所以对于任意 $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 有 $(mL/4) \bmod L = 0$ 。故当 $\tau = mL$ 时, 周期相关函数 $R_b(mL) = 4R_a(0)$, 当 $0 \leq \tau \neq mL \leq 4L-1$ 时, 有 $(\tau/4) \bmod L \neq 0$, 从而得到 $R_b(\tau) = NR_a((\tau/4) \bmod L) = 0$ 。所以 $R_b(\tau)$ 的值满足

$$R_b(\tau) = \begin{cases} 4R_a(0), & \tau = mL \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

当 $\tau=0$ 时, 序列 c 的周期相关函数值 $R_c(0)=4R_a(0)$ 。当且仅当 e 中存在一位负数时, 根据定理 4, 当 $\tau \neq 0$ 时, 如果 $4|\tau$, 则 $R_c=R_b$ 。其他情况, 假设 $e_i < 0, \tau = 4\tau_1 + \tau_2$, 则可知

$$R_c(\tau) = \sum_{i=0}^3 R_a\left(\frac{\tau}{4} \bmod L\right) - 4 \sum_{j=0}^{L-1} a_{x, \frac{i}{4} \bmod L+j} a_{y, \left(\frac{i+\tau_2}{4}\right) \bmod L+j+\tau_1} - 4 \sum_{j=0}^{L-1} a_{x, \frac{i}{4} \bmod L+j} a_{y, \left(\frac{i+\tau}{4}\right) \bmod L+j} = 0 \quad (14)$$

序列偶 c 的 ACF 满足

$$R_c(\tau) = \begin{cases} 4R_a(0), & \tau=0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)知 c 为二元完备序列偶。证毕。

3.3.2 四元完备序列偶的构造方法

(1) 当 $i=0$ 时, 利用定理 5 生成的二元完备序列偶 c 构造新的序列偶 $d^0 = \{d_{l_x}^0, d_{l_y}^0\}$, 其中, $d_{l_x}^0 = I(c_x, c_x)$, $d_{l_y}^0 = I(c_y, c_y)$, $d_{Q_x}^0 = I(c_x, -c_x)$, $d_{Q_y}^0 = I(c_y, -c_y)$ 。

(2) 当 $i>0$ 时,通过递归不断生成四元序列偶

$$d^i = \{d_x^i, d_y^i\}, d_x^i = d_{l_x}^i + j d_{Q_x}^i, d_y^i = d_{l_y}^i + j d_{Q_y}^i. \text{ 其中, } d_{l_x}^i = I(d_{l_x}^{i-1}, d_{Q_x}^{i-1}), d_{Q_x}^i = I(d_{l_x}^{i-1}, -d_{Q_x}^{i-1}), d_{l_y}^i = I(d_{l_y}^{i-1}, d_{Q_y}^{i-1}), d_{Q_y}^i = I(d_{l_y}^{i-1}, -d_{Q_y}^{i-1}).$$

定理 6 该方法构造生成的 d^i 为四元完备序列偶。

证明 四元序列偶 $d^0 = \{d_x^0, d_x^0\}$ 的 ACF 满足

$$R_{d^0}(t) = R_{d^0_{q_x} d^0_{q_x}}(t) + R_{d^0_{q_x} d^0_{\bar{q}_x}}(t) =$$

$$\begin{cases} 2R_{c_{I_x}c_{I_y}}(\tau)+2R_{c_{Q_x}c_{Q_y}}(\tau), t=2\tau \\ 0, t=2\tau+1 \end{cases} \quad (16)$$

由 c 为二元完备序列偶可知

$$R_{d0}(t) = \begin{cases} 16R_a(0), & t=0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

所以 d^0 为四元完备序列偶, (2) 的证明类似于定理 2。证毕。

4 构造实例

例1 对于二元完备序列 $a = (+++-)$, 当 $i = 0$ 时按照定理 2 生成四元序列 $b^0 = b_i^0 + j b_Q^0$, 其中 $b_i^0 = (++++)$, $a_Q^0 = (-+--)$, 四元序列 b^0 的 ACF 为 $R_{a^0} = (16, 0(7))$, b^0 为四元完备序列。其中, $0(x)$ 表示连续 x 个 0 的向量。

当 $i=1$ 时,按照定理 2 生成四元序列 $b^1 = b_l^1 + j b_q^1$, 其中 $b_l^1 = (+++++---+)$, $b_q^1 = (++++-+---)$ 。

四元序列 b^1 的 ACF 为 $R_{b^1} = (32, 0(15))$, b^1 也为四元完备序列。

例 2 对于二元完备序列 $a = (++++)$, 当 $i = 0$ 时, 按照定理 3 生成四元序列 $b^0 = b_i^0 + j b_q^0$, 其中 $b_i^0 = (+-+-+---+++++---++)$, $b_q^0 = (+++++---+-+---++-+)$ 。

四元序列 b^0 的 ACF 为 $R_{b^0} = (32, 0(15))$, 所以 b^0 为四元完备序列。

例3 对于二元互补序列对 $b_l = (-\text{-----}++)$, $b_q = (-\text{---}+-\text{---}++)$, 当 $i = 1$ 时, 依据定理4生成四元序列 $b^1 = b_l^1 + j b_q^1$, 其中 $b_l^1 = (-\text{-----}+-\text{---}+-\text{---}++)$, $b_q^1 = (-+-+--+-+--+-+--+-+)$ 。

四元序列 b^1 的 ACF 为 $R_{b^1} = (40, 0(20))$, 所以 b^1 为四元完备序列。

例 4 根据文献[7]选择二元完备序列偶

$a_x = (-+-+---+-+---), a_y = (-0-0--00-000- --)$ 。依据定理 5, 选择 $e = (0, -4, 8, 12)$, 生成二元序列偶

$$c_x^0 = (-+-++-+--+--+-+---+--+---+\\ +--+--+-----+----+---+), b_y^0 = (-+-\\ -0+0--00-000--+-0-0--00-000---+0-0+-00+\\ 000+---0-10-+00-000)_o$$

二元序列偶 c^0 的 ACF 为 $R_{c^0} = (32, 0(59))$, 所以 c^0 为完备序列偶。

