

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2014.01.012

引用格式:黄超,索继东,于亮.基于自相关函数相位的正弦信号频率估计新算法[J].电讯技术,2014,54(1):63-67.[HUANG Chao,SUO Ji-dong,YU Liang.A Novel Algorithm for Estimation of Sinusoid Frequency Based on Argument of Sample Autocorrelation Function [J].Telecommunication Engineering,2014,54(1):63-67.]

基于自相关函数相位的正弦信号频率估计新算法*

黄超^{1,2,**},索继东¹,于亮³

(1.大连海事大学信息科学技术学院,辽宁大连116026;2.大连理工大学城市学院电子与自动化学院,辽宁大连116600;3.大连理工大学软件学院,辽宁大连116600)

摘要:针对加性高斯白噪声的正弦信号,提出了基于自相关函数相位的频率估计新算法。首先,推导了一种新的自相关函数相位的频率估计式,然后,针对频率估计范围与频率估计精度之间的矛盾问题,提出了一种消除相位模糊的方法。算法分析与仿真结果表明,在信噪比高于6 dB时,估计方差接近克拉美罗下界(CRLB),与TSA算法相比,在估计性能相同条件下,具有更低的计算量,便于工程实现。

关键词:正弦信号;频率估计;自相关函数;估计范围;克拉美罗下界;相位模糊消除

中图分类号:TN911.72 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2014)01-0063-05

A Novel Algorithm for Estimation of Sinusoid Frequency Based on Argument of Sample Autocorrelation Function

HUANG Chao^{1,2},SUO Ji-dong¹,YU Liang³

(1. Institute of Information and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116600, China; 2. School of Electronic Engineering and Automation, City Institute of Dalian University of Technology, Dalian 116600, China; 3. School of Software Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116600, China)

Abstract: A new carrier frequency estimation algorithm based on the argument of the sample autocorrelation function in additive white Gaussian noise (AWGN) is proposed. Firstly, a formula for frequency estimation based on the argument of the sample autocorrelation function is derived. Secondly, a phase ambiguity removal method for solving the contradiction problems between estimation range and estimation accuracy. Algorithm analysis and simulation results show the estimation variance of the proposed algorithm is close to the Cramer-Rao low bound (CRLB) when the signal-to-noise ratio (SNR) is higher than 6 dB and the calculation amount is smaller under the same estimation variance compared with the TSA algorithm and also easy for engineering realization.

Key words: sinusoid signal; frequency estimation; autocorrelation function; estimation range; Cramer-Rao low bound; phase ambiguity removal

1 引言

对淹没于噪声中的正弦信号进行频率估计,无论在理论中还是在实际应用中都具有非常重要的研究价值,国内外众多学者对此做了大量的研究,主要

从频域和时域两个角度进行分析,如基于FFT的频率估计算法^[1-2]。本文从时域的角度对频率估计算法进行研究。传统基于时域的自相关方法有:V. Pisarenko利用少量的自相关函数进行频率估

* 收稿日期:2013-11-06;修回日期:2013-12-19 Received date:2013-11-06;Revised date:2013-12-19

** 通讯作者:39273591@qq.com Corresponding author:39273591@qq.com

计^[3], 此类方法计算简单, 但其性能不高; K. Lui 等人在文献[3]的基础上加以改进, 并定义新的自相关函数^[4], 但由于选取的自相关函数系数较低, 估计性能受到限制; K. Lui 等人在文献[4]的基础上加以修正, 采用较高序号的自相关系数^[5], 使得估计性能得到一定的提升, 但是在信噪比偏低时, 估计性能不够理想; 为了充分挖掘自相关函数包含的频率信息, Rim, H. C. So, Yan Cao 等人尽可能地利用多个自相关函数进行频率估计^[6-8], 使得估计性能得到很大提升, 但同时算法的计算量也增大; 为了进一步提升频率估计性能, K. Lui 提出了两步自相关算法^[9], Yan Cao 等人提出了基于扩展自相关的频率估计算法^[10], 在低信噪比估计性能得到进一步改善, 在中高信噪比时, 频率估计方差接近克拉美罗下界(CRLB)^[11]。然而, 在现有很多算法中, 估计性能的提升都是利用更多的自相关系数或者多步自相关函数, 这样必然会带来算法计算量的增大, 即存在频率估计精度与算法复杂度的矛盾问题。

为了解决上述问题, 本文同样从自相关函数的角度, 充分利用自相关函数包含的频率信息, 推导了一种新的自相关函数相位的频率估计式, 并且针对频率估计范围与频率估计精度之间的矛盾问题, 提出了一种消除相位模糊的方法。计算机仿真表明, 在信噪比较高时, 估计方差接近克拉美罗下界(CRLB), 与 TSA 算法相比, 在估计性能相同条件下, 本文算法的计算量大大降低, 具有很好的应用价值。

2 正弦信号频率估计算法原理

设混有高斯加性白噪声的单频正弦信号表示式为

$$p(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \theta) + \eta(t) \quad (1)$$

其中, a 、 ω_0 、 θ 分别为信号的幅度、频率、相位, $\eta(t)$ 为均值为零、方差为 σ^2 的加性高斯白噪声。对其在观察时间 $0 \leq t \leq T$ 内进行采样 N 个样本值, 于是得到离散序列为

$$p(n) = a \cdot \cos(\omega_0 n + \theta) + \eta(n), 0 \leq n \leq N-1 \quad (2)$$

对上式定义其自相关函数为

$$r_k = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} p(n)p(n+k) \quad (3)$$

当 N 足够大时, 由文献[10]可知, 式(3)可写为

$$E[r_k] \approx \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 k), 1 \leq k \leq N-1 \quad (4)$$

Pisarenko^[3]算法利用低阶自相关 r_1 、 r_2 进行频

率估计, 如下式所示:

$$\hat{\omega}_0^{\text{Pisarenko}} = \arccos\left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + 8r_1^2}}{4r_1}\right) \quad (5)$$

Pisarenko 算法虽然计算量小, 但是频率估计方差和 CRB 相差较大。为了进一步减小频率估计偏差, K. Lui 等人在 PHD 算法的基础上加以改进, 提出了 K. Lui 算法^[4]。其算法仅对 Pisarenko 算法的 r_1 、 r_2 进行重新定义, 改进了 r_1 、 r_2 的估计性能, 如下式所示:

$$\hat{r}_1 = \sum_{n=4}^{N-1} p(n-1)[p(n) + p(n-2)] \quad (6)$$

$$\hat{r}_2 = \sum_{n=4}^{N-1} p(n-2)[p(n) + p(n-4)] \quad (7)$$

于是, 式(5)可改写为

$$\hat{\omega}_0^{\text{KPHD}} = \arccos\left(\frac{\hat{r}_2 + \sqrt{\hat{r}_2^2 + 8\hat{r}_1^2}}{4\hat{r}_1}\right) \quad (8)$$

为了进一步提高载波频率估计性能, TSA 算法^[9]利用更多的自相关函数进行频率估计:

$$\hat{\omega}_0^{\text{TSA}} = \arccos\left(\frac{\Lambda_2 + \sqrt{\Lambda_2^2 + 8\Lambda_1^2}}{4\Lambda_1}\right) \quad (9)$$

其中:

$$\Lambda_1 = \sum_{m=5}^M \Lambda_{1,m}, \Lambda_2 = \sum_{m=5}^M \Lambda_{2,m},$$

$$\Lambda_{1,m} = \sum_{k=4}^{m-1} \lambda_{k-1,m} (\lambda_{k,m} + \lambda_{k-2,m}),$$

$$\Lambda_{2,m} = \sum_{k=4}^{m-1} \lambda_{k-2,m} (\lambda_{k,m} + \lambda_{k-4,m}),$$

$$\lambda_{k,m} = \sum_{n=m+1+k}^{N-m+k} p(n-k)[p(n) + p(n-2k)].$$

从上式可以看出, TSA 算法经过自相关函数的多次组合, 充分挖掘自相关函数包含的频率信息进行频率估值, 理论分析及仿真结果表明, $SNR \geq 0$ dB 时, 频率估计方差接近 CRLB, 且频率估计范围宽; 但是其算法的计算量较大(与 $O(N^3)$ 成正比), 不利于实时信号的处理。

3 本文提出的新的频率估计式

目前, 基于自相关函数的频率估计算法中, 很多都是通过利用多个自相关系数, 使得频率估计的性能得到提升, 如 Yan 算法^[8,10]、TSA 算法^[9]等, 但同时会带来计算量的增加, 不利于实时通信的信号处理。针对频率估计精度与算法复杂度的矛盾问题, 本文从自相关函数相位的角度, 推导了一种新的频

率估计式,较好地解决了上述矛盾问题。

由正弦信号的三角函数特性可知

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 k) + \cos(\omega_0(k+2 \cdot m)) = \\ 2\cos(\omega_0 \cdot m) \cos(\omega_0(k+m)) \end{aligned} \quad (10)$$

于是,可得下式:

$$\hat{r}_k + \hat{r}_{k+2m} = 2\cos(\omega_0 \cdot m) \hat{r}_{k+m}, k > 0 \quad (11)$$

为了进一步提高频率估计性能,对上式进行展开:

$$\sum_{k=p}^q \hat{r}_{k+m}(\hat{r}_k + \hat{r}_{k+2m}) = 2\cos(\omega_0 \cdot m) \sum_{k=p}^q \hat{r}_{k+m}^2 \quad (12)$$

其中, $p \geq 1, p \leq q \leq N-2m-1$ 。于是,可得出本文新的频率估计式:

$$\cos(\hat{\omega}_0 \cdot m) = \frac{\sum_{k=p}^q [\hat{r}_{k+m}(\hat{r}_k + \hat{r}_{k+2m})]}{(2 \sum_{k=p}^q \hat{r}_{k+m}^2)} = \beta(p, q, m) \quad (13)$$

由上式可得频率估计值为

$$\hat{\omega}_{m,p,q} = \frac{\arccos[\beta(p, q, m)]}{m} + \frac{2\pi\xi_m}{m} \quad (14)$$

式中, ξ_m 为整数。

为了研究参数 (p, q, m) 对频率估值的影响,对上式进行了仿真。在仿真中,当 $(\hat{\omega}_{m,p,q} \cdot m)$ 在 $(0, \pi)$ 范围内时,此时 $\xi_m = 0$,令信号幅度 $a = 1, \theta = 0, \omega_0 = 0.01\pi, SNR = 10 \text{ dB}, N = 200, p = 1$ (蒙特卡洛仿真 100 次)。图 1 给出了 $m = 1$ 时不同 q 值时的频率估计方差,从图 1 可以看出,随着 q 值增大,估计性能不断提升,当 q 为 50 左右时,估计性能逐渐接近最佳值。图 2 给出了 $q = 1$ 时不同 m 取值的估计方差,从图 2 可以看出,当 m 为 60 左右时,频率估计性能最佳。

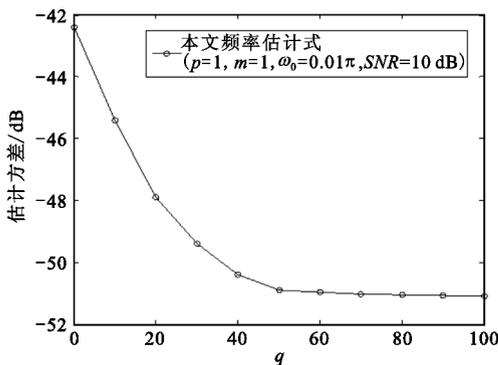


图 1 不同 q 值的估计性能
Fig. 1 Mean square error versus q

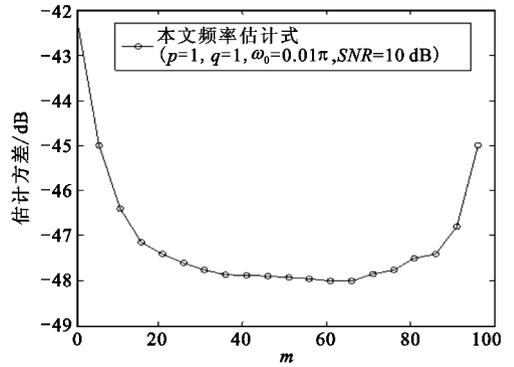


图 2 不同 m 值的估计性能
Fig. 2 Mean square error versus m

以上仿真中,假设频率范围为 $(0, \pi/m)$ 。从图 1 和图 2 可以得出,为了提高频率估计精度, (p, q, m) 参数的取值很关键,不难得出 $(p = 1, q = 50, m = 60)$ 的性能会好于 $(p = 1, q = 50, m = 1)$ 及 $(p = 1, q = 1, m = 60)$ 的性能;而 $m > 1$ 时会缩小频率估计范围,为了扩大估计范围,即 $\hat{\omega}_{m,p,q} \in (0, \pi)$,此时 ξ_m 有 $2m+1$ 种可能的值,即存在相位模糊问题,为了准确地找出 ξ_m 值,消除相位模糊,可采取以下措施(令 $m = 1, 2, \dots, \varepsilon$):

- (1) $m = 1$, 此时不存在相位模糊问题,即 $\xi_1 = 0$, 可求出频率估计值 $\hat{\omega}_{1,p,q}$;
- (2) $m = 2$, 求出 $\left| \frac{\arccos[\beta(p, q, 2)]}{2} + \pi\xi_2 - \hat{\omega}_{1,p,q} \right|_{\min}$ 时对应的 ξ_2 , 再根据式 (13) 求出频率估计值 $\hat{\omega}_{2,p,q}$ ($|\cdot|_{\min}$ 为取最小值);
- (3) 以此类推;
- (4) $m = \varepsilon$, 求出 $\left| \frac{\arccos[\beta(p, q, \varepsilon)]}{\varepsilon} + \frac{2\pi\xi_\varepsilon}{\varepsilon} - \hat{\omega}_{\varepsilon-1,p,q} \right|_{\min}$

时对应的 ξ_ε , 再根据式 (13) 求出频率估计值 $\hat{\omega}_{\varepsilon,p,q}$ 。

综上所述, q 值的增大会带来频率估计精度的提升,但同时会导致计算量过大,因此,在实际应用中,应综合考虑估计性能和计算量之间矛盾的问题。

4 计算量及性能分析

4.1 计算机仿真及性能分析

本节通过计算机 MATLAB 仿真实验(蒙特卡洛仿真 100 次)来验证本文提出算法的估计性能。图 3 给出 $SNR = 10 \text{ dB}$ 时不同频率处的性能比较,本文频率估计算法的性能 ($m = 50, p = 1, q = 70$) 在 $\omega_0 \in [0.15\pi, 0.85\pi]$ 达到 CRLB, 频率估计范围与 TSA

算法^[9]相当,都宽于 K. Lui 算法^[5]的频率估计法范围。图 4 给出了 $\omega_0=0.3\pi, N=200$ 时不同信噪比下各种算法的性能比较,可以看出,在 $SNR>0$ dB 时,随着信噪比增大,本文算法 ($m=50, p=1, q=50, m=50, p=1, q=70$ 及 $m=50, p=1, q=80$) 与 TSA 算法的估计性能相当,都接近于 CRLB,且性能都好于 K. Lui 算法^[5];在 $SNR<0$ dB 时,随着 SNR 的减小,估计性能偏离 CRLB 的程度从大到小依次为 K. Lui 算法^[5]、本文算法 ($m=50, p=1, q=50$)、本文算法 ($m=50, p=1, q=70$)、本文算法 ($m=50, p=1, q=80$) 和 TSA 算法^[9]。

算量(与 $O(N^3)$ 成正比)。由式(8)、式(9)、式(13)可以看出,K. Lui 算法^[5]只利用几个自相关系数进行频率估计,本文算法利用多个自相关系数且通过递推的方式求出频率值,而 TSA 算法^[9]是在一步自相关的基础上再作自相关运算,其计算量最大。从图 4 的仿真结果来看,本文算法 ($m=50, p=1, q=80$) 与 TSA 算法的频率估计性能非常接近,但本文算法的计算量约为 TSA 算法^[9]的 2/5,非常有利于信号的实时处理。

表 1 算法计算量比较

Table 1 Comparison of arithmetic operations

算法	加减	乘
本文算法 ($p=1, q=2N/5,$ $m=3N/10$)	$\frac{2}{5}N^2 + \frac{174}{4}N - 3$	$\frac{2}{5}N^2 + 3N + 1$
K. Lui 算法	$4N - 12$	$2N - 7$
TSA 算法 ($M=(N-1)/2$)	$2NM^2 + M^2 - \frac{8}{3}M^3 -$ $32N + 224$	$NM^2 + M^2 - \frac{4}{3}M^3 -$ $\frac{26}{3}M - 16N + 104$

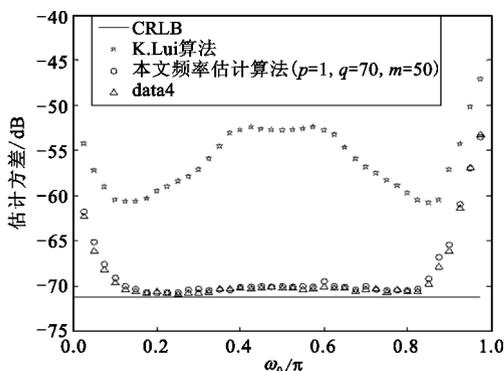


图 3 不同频率处的性能比较
Fig. 3 Mean square error versus ω_0

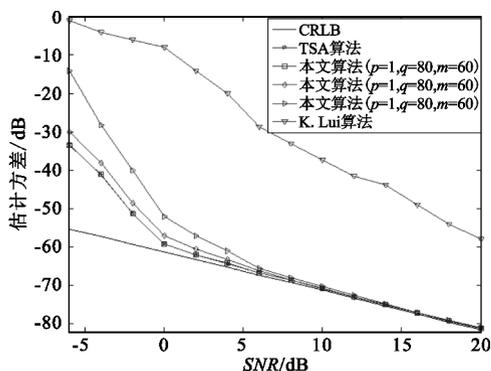


图 4 不同信噪比下的性能比较
Fig. 4 Mean square error versus SNR

综上分析可得,在信噪比较高时,本文算法中 q 值可以选择较小(q 值越小,计算量越小),如 $q=50$,其估计性能也接近 CRLB;在信噪比较低时,本文算法中 q 值可以选择较大,如 $q=80$,其估计性能偏离 CRLB 最小。

4.2 算法复杂度比较

从表 1 可以看出,本文算法的计算量(与 $O(N^2)$ 成正比)高于 K. Lui 算法^[5],低于 TSA 算法^[9]的计

5 结论

充分利用自相关函数包含的频率信息进行频率估计,可以使估计性能得到提升。本文针对加性高斯白噪声的正弦信号,提出了基于加窗自相关函数相位噪声的频率估计算法。文中推导了自相关函数相位噪声的频率估计式,并针对频率估计范围与频率估计精度之间的矛盾问题,提出了一种消除相位模糊的方法。仿真结果表明,在信噪比较高时,估计方差接近克拉美罗下界(CRLB),且在估计性能相同条件下,与 TSA 算法相比,本文算法的计算量大大降低,在工程上具有很好的应用价值。

然而,在现有的众多算法中,低信噪比时的估计性能还是不够理想,如何更好地挖掘自相关函数包含的频率信息,降低频率估计的信噪比阈值,将是我们进一步研究的内容。

参考文献:

[1] 王宏伟,赵国庆,齐非林. 一种实时精确的正弦波频率估计算法[J]. 数据采集与处理,2009,24(2):208-211.
WANG Hong-wei, ZHAO Guo-qing, QI Fei-lin. Real-Time and Accurate Single Frequency Estimation Approach [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2009, 24

- (2):208-211. (in Chinese)
- [2] 路伟涛,杨文革,洪家财,等. 一种新的正弦信号频率和初相估计方法[J]. 电讯技术,2012,52(9):1459-1464.
LU Wei-tao, YANG Wen-ge, HONG Jia-cai, et al. A Novel Method for Frequency and Initial Phase Estimation of Single-tone Signals[J]. Telecommunication Engineering, 2012,52(9):1459-1464. (in Chinese)
- [3] Pisarenko V. The retrieval of harmonics by linear prediction[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1973,33(5):347-366.
- [4] Lui K, So H C. Improved Variant of Pisarenko Harmonic Decomposition for Single Sinusoidal Frequency Estimation[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2007, 90(11):2604-2607.
- [5] Lui K, So H C. Modified Pisarenko Harmonic Decomposition for Single-tone frequency estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(7):3351-3356.
- [6] Elasmı-Ksıbi R, Besbes H, López-Valcarce R, et al. Frequency estimation of real-valued single-tone in colored noise using multiple autocorrelation lags[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 90(7):2303-2307.
- [7] So H C, Chan K W. Reformulation of Pisarenko harmonic decomposition method for single-tone frequency estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(4):1128-1135.
- [8] Cao Yan, Wei Gang, Chen Fang-Jiong. An exact analysis of Modified Covariance frequency estimation algorithm based on correlation of single-tone[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 92(4):2785-2790.

- [9] Lui K, So H C. Two-stage autocorrelation approach for accurate single sinusoidal frequency estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 88(7):1852-1857.
- [10] Cao Yan, Wei Gang, Chen Fang-Jiong. A Closed-form Expanded Autocorrelation Method for Frequency Estimation of A Sinusoid[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 92(4):1852-1857.
- [11] Funga H W, Alex C, Kotb K H Li, et al. Parameter Estimation of A Real Single Tone from Short Data Records[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 84(3):601-617.

作者简介:



黄超(1978—),男,江西九江人,讲师,博士研究生,主要研究方向为通信信号处理;

HUANG Chao was born in Jiujiang, Jiangxi Province, in 1978. He is now a lecturer and currently working toward the Ph. D. degree. His research direction is communication signal processing.

Email:39273591@qq.com, hcph98@163.com

索继东(1959—),男,辽宁盘锦人,教授、博士生导师,主要研究方向为导航与雷达信息系统;

SUO Ji-dong was born in Panjin, Liaoning Province, in 1959. He is now a professor and also the Ph. D. supervisor. His research concerns navigation and radar information system.

于亮(1980—),女,辽宁大连人,硕士,讲师,主要研究方向为计算机语言及日语。

YU Liang was born in Dalian, Liaoning Province, in 1980. She is now a lecturer with the M. S. degree. Her research concerns computer language and Japanese language.

本刊 2013 年版影响因子年报发布

根据中国学术期刊(光盘版)电子杂志社和中国科学文献计量评价研究中心发布的《中国学术期刊影响因子年报(自然科学与工程技术·2013版)》,本刊2012年多项文献计量评价指标较上年均有提高,综合影响因子增幅达12.54%,高影响力作者发文增幅达71%。

年报显示,本刊的复合影响因子在133种同类期刊中排名58位,期刊综合影响因子在同类133种期刊中排名第50位,技术研究类影响因子在同类100种期刊中排36位,与上年度相比排位总体一致。

由于本刊2012年载文量达到了历史新高,使得分母增大,影响因子有所下降。此外,web下载量和web即年下载率均下降明显,这主要是因为本刊论文在门户网站提供免费下载以扩大影响力,从而对国内有关数据库和网站的在线下载造成了冲击。

虽然年报发布的仅只反映了统计时段内的期刊发展状况,作为参考,但某些指标的明显变化应引起重视,值得深入思考。编辑部将针对具体情况,努力采取措施,以进一步提高质量为中心,逐步提升核心竞争力,办出特色,搭建更高层次的学术交流平台,实现本刊的可持续发展。

本刊编辑部