doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2013.12.019

三维 LOD-FDTD 方法在 PMC 边界处的精确格式*

刘丽娜,朱 峰**,徐常伟

(西南交通大学 电气工程学院,成都 610031)

摘 要:证明了局部一维时域有限差分(LOD-FDTD)方法实现理想磁导体 (PMC)边界时的待求场 分量系数与传统的 LOD-FDTD 方法系数不同。通过在获得该系数前应用理想导体边界条件,得到 对应的修正系数。计算了单个 PMC 立方体和对称的两个 PMC 立方体的双站 RCS。计算结果表明, PMC 边界作为理想导体表面时,传统 LOD-FDTD 方法计算误差较大,采用修正系数的计算结果与传统 FDTD 方法计算结果更为吻合;PMC 边界作为截断计算空间的对称面,采用修正系数的计算结果 与传统 LOD-FDTD 方法计算结果相同。采用修正系数处理 PMC 边界无需区分 PMC 边界是理想磁 导体表面还是截断计算空间的对称面,具有统一的表达式,计算理想磁导体表面较传统 LOD-FDTD 方法误差更小。

Accurate Algorithm on PMC Boundary for 3D LOD-FDTD Method

LIU Li-na, ZHU Feng, XU Chang-wei

(College of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The field coefficient on perfect magnetic conductor boundary is proved to be different from that in the conventional locally one-dimensional finite-difference time-domain (LOD-FDTD) calculation. The correction coefficient is derived by setting PMC boundary condition before the conventional field coefficient is obtained from the implicit equations. Bistatic RCS calculations of a PMC cube and two symmetrical PMC cubes are provided by using correction coefficient method, conventional LOD -FDTD method and FDTD method, respectively. For the surface of perfect conductor, numerical results of correction coefficient method agree well with those of conventional LOD -FDTD. The theory proposed in this paper is validated. Correction coefficient method has unified expressions and it is found that less calculation errors occur than conventional LOD -FDTD method is used.

Key words: PMC boundary; finite-difference time-domain (FDTD) method; locally one-dimensional finite-difference time-domain (LOD-FDTD) method

1 引 言

时域有限差分(FDTD)方法及其改进算法在很 多领域得到了广泛应用^[1-2],但是 Courant- Friedrich - Levy(CFL)稳定条件限制了时间步长,导致传统 FDTD 方法在数值模拟复杂模型时,所需计算时间 过长。基于划分子时间步隐式计算思想的 FDTD 改 进算法,包括局部一维时域有限差分(LOD-FDTD) 方法^[3]和交替时间隐式时域有限差分(ADI-FDTD)

· 1638 ·

 ^{*} 收稿日期:2013-09-10;修回日期:2013-11-19 Received date:2013-09-10;Revised date:2013-11-19 基金项目:国家自然科学基金资助项目(60971041)
 Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No. 60971041)

^{**} 通讯作者:zhufeng@swjtu.cn Corresponding author:zhufeng@swjtu.cn

方法^[4]等方法,它们能够实现无条件稳定,时间步 长的选取不受 CFL 条件的限制。LOD-FDTD 方法 将 $n \rightarrow n+1$ 的过程分成 $n \rightarrow n+1/2 \rightarrow n+1/2 \rightarrow n+1$ 的 两个子时间过程,被证明与 ADI-FDTD 方法有相同 的计算精度,且计算时间比 ADI-FDTD 方法减少 55%^[5]。LOD-FDTD 方法的无条件稳定^[6],计算效 率^[6]、计算误差^[7]、相关吸收边界以及与减缩时域 有限差分(R-FDTD)方法^[8]等相结合的探讨都是研 究的热点。人工磁导体在天线领域的应用备受关 注^[9],PMC 边界还可以作为对称面截断计算空间, 有效减少内存使用量和计算时间^[10]。PMC 边界上 的切向磁场均为零,当 LOD-FDTD 计算区域中出现 PMC 边界时,由于部分场分量被置零,导致待求场 分量系数发生变化,如果不对系数进行修正,场分量 的计算结果会出现误差。

本文考虑三维 LOD-FDTD 情况,在得到待求场 分量系数之前应用 PMC 边界条件, 推导出 LOD-FDTD 方法在理想导体边界处待求场分量的修正系 数。对于 PMC 边界作为理想导体表面和截断计算 空间的对称面的不同情况加以区分,讨论了修正系 数与传统 LOD-FDTD 系数的区别。采用修正系数 LOD-FDTD 方法计算了单个 PMC 立方体和具有对 称结构的两个 PMC 立方体的双站 RCS, 计算结果与 传统 LOD-FDTD 方法和 FDTD 方法的计算结果进 行比较,结果表明对于理想磁导体表面,采用修正系 数 LOD-FDTD 方法的计算结果与传统 FDTD 方法 计算结果更为吻合:PMC 边界条件作为对称面截断 计算空间的情况,采用修正系数 LOD-FDTD 方法的 计算结果与传统 LOD-FDTD 方法计算结果相同。 修正系数 LOD-FDTD 方法处理 PMC 边界的优点在 于具有统一的表达式,降低了编程复杂度,无需区分 PMC 边界是理想磁导体表面还是截断计算空间的 对称面,计算理想磁导体表面较传统 LOD-FDTD 方 法有较小的计算误差。

2 理论分析

2.1 LOD-FDTD 方法

LOD-FDTD 方法将 FDTD 方法中 $n \rightarrow n+1$ 的过程分成 $n \rightarrow n+1/2$ 和 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 的两个子时间过程:

$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{U}^{n+1/2} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{U}^{n}$$
(1)

$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{U}^{n+1} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{U}^{n+1/2}$$
(2)

其中, $U = [E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z]^T$,I为单位矩阵,矩 阵A 和 B如文献[11]中式(33)和式(34)所示。

将各场分量代入矩阵关系式,可以得到场分量 隐式表达式。在 $n \rightarrow n+1/2$ 子时间步, E_x 和 H_z 相关 联,沿y方向推进; E_y 和 H_x 相关联,沿z方向推进; E_z 和 H_y 相关联,沿x方向推进。由式(1)可以得到 $n \rightarrow n+1/2$ 子时间步,仅与 E_x 和 H_z 相关的方程:

$$E_x^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial H_z^{n+1/2}}{\partial y} = E_x^n + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \frac{\partial H_z^n}{\partial y}$$
(3)

$$H_{z}^{n+1/2} - \frac{\Delta t \,\partial E_{x}^{n+1/2}}{2\mu \,\partial y} = H_{z}^{n} + \frac{\Delta t \,\partial E_{x}^{n}}{2\mu \,\partial y} \tag{4}$$

离散以上两式,得到 E_x 和 H_z 的隐式差分方程:

$$E_{x} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = E_{x} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y} (H_{z} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_{z} \Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} + H_{z} \Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n} - H_{z} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n} - H_{z} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n} + \frac{\Delta t}{2\mu\Delta y} (E_{x} \Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} - E_{x} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} + E_{x} \Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n} - E_{x} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n} \Big)$$
(5)

将式(5)中两个 *n*+1/2 时刻 *H_z* 分量由式(6)表达,整理得到传统 LOD-FDTD 计算 *E_x* 分量的表达式

 $aE_{x}\Big|_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2}+bE_{x}\Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}+cE_{x}\Big|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2}=d \quad (7)$ 其中:

$$\begin{split} a &= -\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2}, b = 1 + \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}, c = -\frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2}, \\ d &= \left(1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}\right) E_x \mid_{i+1/2,j,k}^n + \\ &= \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} (E_x \mid_{i+1/2,j-1,k}^n + E_x \mid_{i+1/2,j+1,k}^n) + \\ &= \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} (H_z \mid_{i+1/2,j+1/2,k}^n - H_z \mid_{i+1/2,j-1/2,k}^n) \end{split}$$

2.2 PMC 边界的 LOD-FDTD 实现

LOD-FDTD 方法在 $n \rightarrow n+1/2$ 和 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 的两个子时间过程均需要隐式计算电场,再由计算 所得电场值,显式计算得到磁场值。LOD-FDTD 方 法隐式更新电场的特点,决定了 PEC 边界实现较容 易,但 PMC 边界实现较复杂。下面展开论述三维 LOD-FDTD 方法实现 PMC 边界的具体问题。

PMC 边界满足切向磁场和法向电场为零的条件,在 $y = (j_0 - 1/2) \Delta y$ 处,垂直于 y 轴设置 PMC 边界面, $H_x \mid_{i,j_0-1/2,k+1/2} = 0, H_z \mid_{i+1/2,j_0-1/2,k} = 0, E_y \mid_{i,j_0-1/2,k} = 0.$ 分别采用传统 LOD – FDTD 方法和修正系数 LOD – FDTD 方法两种方法处理 PMC 边界条件。

(1)传统 LOD-FDTD 方法

得到式(7)之后将 PMC 边界条件代入:

①如果 PMC 边界作为理想磁导体表面,则有
$$E_x|_{i+1/2,j_0-1,k}=0$$
,可以得到

$$b'E_{x}\Big|_{i+1/2,j_{0},k}^{n+1/2}+c'E_{x}\Big|_{i+1/2,j_{0}+1,k}^{n+1/2}=d'$$

$$其中, string b'=b,c'=c, \qquad (8)$$

$$d' = \left(1 - \frac{\Delta t^2}{2\varepsilon\mu\Delta y^2}\right) E_x \mid_{i+1/2,j_0,k}^n + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_x \mid_{i+1/2,j_0+1,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} H_z \mid_{i+1/2,j_0+1/2,k}^n$$

②如果 PMC 边界作为截断计算空间的对称面, 应用镜像原理, PMC 截断面两侧有 $E_x |_{i+1/2,j_0-1,k} = E_x |_{i+1/2,j_0,k}$,可以得到

$$b''E_x \mid_{i+1/2,j_0,k}^{n+1/2} + c''E_x \mid_{i+1/2,j_0+1,k}^{n+1/2} = d''$$
(9)

其中,系数
$$b''=1+\frac{\Delta t}{4\varepsilon\mu\Delta\gamma^2}, c''=c$$
,

$$d'' = \left(1 - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2}\right) E_x \Big|_{i+1/2,j_0,k}^n + \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon\mu\Delta y^2} E_x \Big|_{i+1/2,j_0+1,k}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} H_z \Big|_{i+1/2,j_0+1/2,k}^n$$

(2)修正系数 LOD-FDTD 方法

得到式(7)之前,即在式(6)代入式(5)之前考 虑 PMC 边界条件 $H_z \mid_{i+1/2,j_0-1/2,k}^{n+1/2} = 0$,仅将 $H_z \mid_{i+1/2,j_0-1/2,k}^{n+1/2}$ 用式(6)展开代入式(5)可以得到

$$b'''E_{x} \Big|_{i+1/2,j_{0},k}^{n+1/2} + c'''E_{x} \Big|_{i+1/2,j_{0}+1,k}^{n+1/2} = d'''$$
(10)

$$\ddagger \oplus, \, \lessapprox \, \& b''' = 1 + \frac{\Delta t^{2}}{4\varepsilon\mu\Delta y^{2}}, c''' = c,$$

$$d''' = \left(1 - \frac{\Delta t^{2}}{4\varepsilon\mu\Delta y^{2}}\right) E_{x} \Big|_{i+1/2,j_{0},k}^{n} + \frac{\Delta t^{2}}{4\varepsilon\mu\Delta y^{2}} E_{x} \Big|_{i+1/2,j_{0}+1,k}^{n} + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y} H_{z} \Big|_{i+1/2,j_{0}+1/2,k}^{n}$$

修正系数 LOD-FDTD 方法不需要区分 PMC 边 界是理想磁导体表面还是截断计算空间的对称面, 得到了实现 PMC 边界的统一格式。对比修正系数 LOD-FDTD 方法与传统 LOD-FDTD 方法比较的结 果,在处理理想磁导体表面时,等式左端 $E_x|_{i+1/2,j_0,k}^{n+1/2}$ 的 系数 $b'''=1+\frac{\Delta t^2}{4\epsilon\mu\Delta y^2}$ 与 $b'=1+\frac{\Delta t^2}{2\epsilon\mu\Delta y^2}$ 不同;等式右端 $E_x|_{i+1/2,j_0,k}^n$ 的系数,在 $d'''中为\left(1-\frac{\Delta t^2}{4\epsilon\mu\Delta y^2}\right)$,在 d'中为 $\left(1-\frac{\Delta t^2}{2\epsilon\mu\Delta y^2}\right)$ 。对于 PMC 边界作为对称面截断计算 空间的情况,截断面的表面虽然同样满足 PMC 边界 条件,但是由于截断面以外的场分量不再为零,修正 系数 LOD-FDTD 方法与传统 LOD-FDTD 方法表达 式相同。 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 的子时间步有类似的情况。

3 数值计算结果

采用修正系数 LOD-FDTD 方法计算单个 PMC 立方体和对称的两个 PMC 立方体的双站 RCS,与传 统 LOD-FDTD 方法和 FDTD 方法的计算结果进行 比较。平面波频率3 GHz沿 z 方向入射, x 方向极 化。计算空间由 PML 吸收边界截断。FDTD 算法的 时间步长 $\Delta t = 8.333 \times 10^{-12}$ s,空间步长 $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ = 0.005 m,修正系数 LOD-FDTD 方法和传统 LOD-FDTD 方法的时间步长 $\Delta t_{100} = 3\Delta t_o$

算例1:理想磁导体表面的情况

计算一个 PMC 立方体的双站 RCS, PMC 立方体每个面都采用 PMC 边界条件,立方体边长为 L= 0.1 m。计算模型如图 1 所示, 3 种方法对比计算 PMC 立方体的双站 RCS 如图 2 所示。分析对比计 算结果,对于设置在理想磁导体表面的 PMC 边界, 3 种方法的计算结果差别不大,修正系数 LOD-FDTD 方法的计算结果更接近 FDTD 方法的计算结果,说 明了理想磁导体表面采用修正系数计算的正确性和 必要性。



图 1 算例 1 的计算模型 Fig. 1 The calculation model of Example 1





算例 2:PMC 边界截断对称空间的情况 计算对称的两个 PMC 立方体的双站 RCS,每个 立方体边长为L=0.1 m,两个 PMC 立方体中心间距 0.2 m。PMC 立方体表面均采用修正系数计算。在 与 y 轴垂直的整个计算区域的对称面处设置 PMC 边界截断,只计算 FDTD 方法的一半空间。计算模 型如图 3 所示,分别用 3 种方法处理 PMC 截断面, 对比计算得到的两个 PMC 立方体的双站 RCS 如图 4 所示。



图 3 算例 2 的计算模型 Fig. 3 The calculation model of Example 2



图 4 不同方法计算对称的两个 PMC 立方体的双站 RCS Fig. 4 Different methods comparison of bistatic RCS of two symmetric PMC boxes

分析对比计算结果,对于 PMC 边界作为对称面 截断计算空间的情况,修正系数 LOD-FDTD 方法和 传统 LOD-FDTD 方法的计算结果吻合。截断面的 表面同样满足 PMC 边界条件,但是由于截断面以外 的场分量不再为零,所以,修正系数 LOD-FDTD 方 法有与传统 LOD-FDTD 方法相同的表达式。数值 计算结果也表明,PMC 边界作为对称面截断计算空 间,修正系数 LOD-FDTD 方法和传统 LOD-FDTD 方法等同。

4 结 论

本文考虑三维 LOD-FDTD 方法,在得到待求场 分量系数之前应用理想导体边界条件,推导出在理 想磁导体边界处与传统 LOD-FDTD 方法不同的待 求场分量的修正系数。计算了单个 PMC 立方体和 对称的两个 PMC 立方体的双站 RCS,采用修正系数 LOD-FDTD 方法与传统 LOD-FDTD 方法和 FDTD 方法的计算结果进行了对比。数值计算结果表明, PMC 边界作为理想磁导体表面时,修正系数 LOD-FDTD 方法与传统 LOD-FDTD 方法相比误差更小; PMC 边界作为对称面截断计算空间时,应用镜像原 理,修正系数 LOD-FDTD 方法与传统 LOD-FDTD 方法等同。修正系数方法处理 PMC 边界的优点在 于具有统一的表达式,降低了编程复杂度,无需区分 PMC 边界是理想磁导体表面还是截断计算空间的 对称面,计算理想磁导体表面较传统 LOD-FDTD 方 法有较小的计算误差。

参考文献:

- [1] 冯延彬,李国林,路翠华,等.基于混合信号仿真技术的高功率微波与无线电引信耦合效应分析[J].电讯技术,2013,53(6):807-811.
 FENG Yan-bin, LI Guo-lin, LU Cui-hua, et al. Analysis of high power microwaves effect on radio fuse by mixed signal simulation technology[J]. Telecommunication Engineering, 2013,53(6):807-811. (in Chinese)
- [2] 冯延彬,李国林,李春荣,等. 基于 PSO/FDTD 的波 导缝隙天线优化设计[J]. 电讯技术, 2013, 53(5): 645-649.

FENG Yan-bin, LI Guo-lin, LI Chun-rong, et al. Optimal Design of Waveguide Slot Antenna Based on PSO/ FDTD [J]. Telecommunication Engineering, 2013, 53 (5): 645-649. (in Chinese)

- [3] Shibayama J, Muraki M, Yamauchi J, et al. Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one- dimensional scheme [J]. Electronics Letters, 2005, 41(19): 1046-1047. (in Chinese)
- [4] Namiki T. 3-D ADI-FDTD method- unconditionally stable time - domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2000, 48 (10): 1743 – 1748.
- [5] Liu Q F, Chen Z Z, Yin W Y. An efficient unconditionally stable three-dimensional LOD-FDTD method [C]//Proceedings of 2008 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. Atlanta, GA: IEEE, 2008:45-48.
- [6] Ahmed I, Chua E K, Li E P, et al. development of the three – dimensional unconditionally stable LOD – FDTD method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(11): 3596–3600.
- [7] Ahmed I, Chua E K, Li E P. Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable three-dimensional LOD -FDTD method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(12): 3983-3989.

[8] 张品,陈亦望,傅强.一种提高内存使用效率的时域 有限差分算法[J].电波科学学报,2011,26(4):814 -819.

ZHANG Pin, CHEN Yi-wang, FU Qiang. A memory-efficient FDTD algorithm [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2011, 26(4): 814-819. (in Chinese)

[9] 鲁磊,屈绍波,马华,等.宽带雷达散射截面减缩人 工磁导体复合结构[J].物理学报,2013,62(3):170-175.

> LU Lei, QU Shao-bo, MA Hua, et al. A broadband artificial magnetic conductor composite structure for radar cross section reduction [J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(3):170-175. (in Chinese)

 [10] 张岩,吕善伟,苗俊刚,等.FDTD-PWS 法用于分析 毫米波透镜天线焦面场[J].北京航空航天大学学 报,2007,33(6):682-685.

ZHANG Yan, LV Shan-wei, MIAO Jun-gang, et al. Hybrid FDTD-PWS method for focal field analysis of lens antenna at millimeter-wave band [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(6): 682-685. (in Chinese)

[11] Tan E L. Fundamental schemes for efficient unconditional- ly stable implicit finite-difference time-domain methods[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(1): 170-177.

作者简介:



刘丽娜(1981—),女,河北唐山人,2000 年获学士学位,现为西南交通大学博士生研 究生,主要研究方向为电磁散射、电磁场数值 计算;

LIU Li-na was born in Tangshan, Hebei Province, in 1981. She received the B. S. degree in 2000. She is currently working toward

the Ph. D. degree. Her research concerns electromagnetic scattering and electromagnetic computation.

Email: linaapple329@163.com

朱 峰(1963—),男,安徽人,教授、博士生导师,主要 研究方向为电磁场与电磁波、电磁场数值计算;

ZHU Feng was born in Anhui Province, in 1963. He is now a professor with the Ph. D. degree and also the Ph. D. supervisor. His research concerns electromagnetic computation, electromagnetic field and wave.

Email: zhufeng@ swjtu. cn

徐常伟(1984—),男,河南人,2004 年获学士学位,现为 西南交通大学博士研究生,主要研究方向为电磁散射、电磁 场数值计算。

XU Chang-wei was born in Henan Province, in 1984. He received the B. S. degree in 2004. He is currently working toward the Ph. D. degree. His research concerns electromagnetic scattering and electromagnetic computation.