

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2013.10.012

基于标记位的低密度格码整形方案^{*}

朱联祥^{**}, 付孟孟

(重庆邮电大学 信号与信息处理重庆市重点实验室, 重庆 400065)

摘要:为解决低密度格码(LDLC)编码后码字不能适用于功率受限信道的问题,提出了一种基于标记位的 LDLC 码整形算法。该算法结合标记位整形思想,针对 LDLC 码的特点,通过最小和算法求解出平均功率最小的信息序列。分析并仿真了整形前后信息功率的变化及取得的整形增益。实验结果显示:整形后的码字功率明显小于整形前的功率,可达到 0.53 dB 的整形增益,同时该整形算法接收端逆整形简单。

关键词:低密度格码;功率受限;标记位整形;最小和算法
中图分类号:TN911.22 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2013)10-1317-04

A Shaping Method for Low-Density Lattice Codes Based on Sign Bit Integer

ZHU Lian-xiang, FU Meng-meng

(Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: In order to solve the problem that the Low Density Lattice Codes(LDLC) cannot be applied in power limited channels, an LDLC shaping algorithm based on sign bits is proposed. Based on the algorithm of sign bits shaping and combined with the characteristic of low density lattice codes, this algorithm solves the minimizing average power information sequence by the min-sum algorithm. The shaping gain and the information power changes before and after shaping are analyzed. The simulation result shows that after shaping the code power is significantly less than that before shaping. The shaping gain is up to 0.53 dB. At the same time, it is simple to realize inverse shaping at receiver by using this method.

Key words: low-density lattice code; limited power; sign bit integer shaping; min-sum algorithm

1 引言

低密度格玛(Low Density Lattice Codes, LDLC)是 2007 年结合低密度奇偶校验码(LDPC)和格码提出的信道编码技术,其编码采用雅克比迭代,译码采用高斯迭代,编译码复杂度较低。有研究证明,在误码率为 10^{-5} 的条件下,当码长 $n=10\ 000$ 时,LDLC 码距离信道容量仅有 0.8 dB^[1]。这些良好的性能都使得 LDLC 码在未来通信系统中的应用成为可能。

由于 LDLC 码的研究还处于初级阶段,目前对 LDLC 码的研究主要包括编译码算法和 H 矩阵的构

造,而这些研究都是在功率不受限的高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道下进行的。LDLC 码经过编码后,码字的平均功率增加,同时峰值功率也增大,导致信号的动态范围变大,不能在功率受限的信道中传输,所以必须在编码前对它进行整形处理,以控制编码后功率的增加^[2-4]。整形的目的就是在编码前对信息序列 $\mathbf{b}'$ 进行处理,使得输入的信息序列只映射到整形区域的格点上,最终使编码后信息的平均功率不大于未编码时的信息平均功率,最终达到控制功率的目的。把输入信息

^{*} 收稿日期:2013-05-31;修回日期:2013-09-12 Received date:2013-05-31;Revised date:2013-09-12

^{**} 通讯作者:zhulx@cqupt.edu.cn Corresponding author:zhulx@cqupt.edu.cn

• 1317 •

矢量 $\mathbf{b}$ 映射为矢量 $\mathbf{b}'$ 的过程叫做整形。在相同传输条件下,整形前后平均功率的减少称为整形增益。整形增益和编码增益是两个不同的概念,它们是相互独立的^[5]。

理想的整形方法是定义整形区域为一个超球形,将信息序列 $\mathbf{b}$ 映射到这个超球体内,使得每个码字都服从高斯分布,这样的整形理论上可以达到 1.53 dB 的整形增益^[6]。但是将信息序列映射到一个无限维的超球体内非常复杂,实际操作中难以实现。目前对于整形的研究还比较少,针对 LDLC 码还没有切实可行的整形方案。

文献[7]中 Sommer 提出了 3 种整形思想,分别是超立方体整形、系统整形、嵌套格整形。这 3 种整形方法是把编码前的信息序列 b_i 看作是星座图上的点,根据格码整形的思想对 b_i 进行处理,以达到整形的目的。但是文献中提到的这 3 种整形方法都是基于特定的下三角校验矩阵进行的,具有特殊性和局限性。同时,在系统整形中,作者提出一种系统编码,即要求编码后的码字中包含编码前的信息序列,目前的 LDLC 研究中并没有这样的码字存在,所以该算法对目前 LDLC 码的整形并不适用。

针对 LDLC 码目前的研究现状,本文提出了一种基于标记位的 LDLC 码整形方案:将输入的信息序列映射到星座图中,把这些信息序列分为标记位和非标记位,根据 LDPC 码的校验矩阵 $\mathbf{H}$ 和 Tanner 图,对标记位信息进行整形处理,并利用最小和算法求出整形后的序列,使得整形后信息序列的平均功率达到最小。该算法使用于目前 LDLC 码研究中用到的所有校验矩阵,具有普遍性,而且该算法复杂度低,容易实现。

2 相关理论

下面通过图 1 的一个编码调制系统对符号位整形方法进行简单的介绍。假设有一个 16×16 的方星座图,其中 $d_{\min}^2 = 1$ 。图 1 中的星座映射是将每 4 个状态的信息 $zabc$ 映射到 $zabc$ 。1 上,其中,把 z 看作是标记位, abc 看作是非标记信息位。就是把信息序列 b 分成两部分,即 z 和 s ,其中 z 作为标记位, s 作为非标记位。标记位整形就是通过整形改变标记位 Z ,但是非标记位的信息不变,通过选择标记位的编码序列,使得整个信息序列映射到星座图的平均能量达到最小^[8]。在一个 16-QAM 星座中每个标记位有 4 种状态可供选择,4 种状态对应 4 个不同的功率。因此,通过选取合适的标记符号矢量,可以使信息序列的传输能量达到最小^[9]。

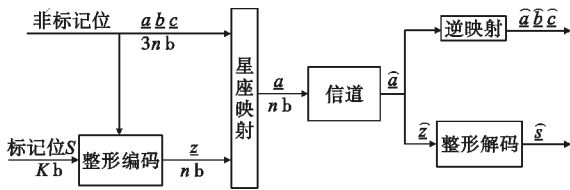


图 1 结合标记位整形的编码调制系统
Fig. 1 Coded modulation system with sign bit shaping

3 本文算法

本文整形的基本思想和标记符号整形类似,即通过整形找出平均功率最小的信息序列,这种算法是对标记整形算法的扩展。图 1 中对应的整形码选用 LDPC 码,假设该 LDPC 码的校验矩阵为 $\mathbf{H}$,生成矩阵为 $\mathbf{G}$,那么整形的目的是为了找到最佳的序列 Z ,其中 Z 满足以下两个条件:

- (1) $Z\mathbf{H}^T = s$, 其中 s 是 kb 的标记位信息;
- (2) 整形后映射到星座图后的能量 $\alpha = \text{map}(z, a, b, c)$ 是最小的,也就是说,

$$z = \arg \min_{u: u\mathbf{H}^T = s} \sum_{i=1}^n \|u_i a_i b_i c_i \cdot 1\|^2 \quad (1)$$

式中, $\|x\|$ 是 x 的绝对值。

在接收端,我们可以通过 $S = Z\mathbf{H}^T$ 恢复出 s ,由于非标记位 abc 并没有发生变化,只是映射到了星座图中,所以可以通过一个逆映射直接恢复出 abc 。

下面我们通过一个简单的例子对该算法进行说明。假设有如下的校验矩阵:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

它对应的 Tanner 图如图 2 所示。

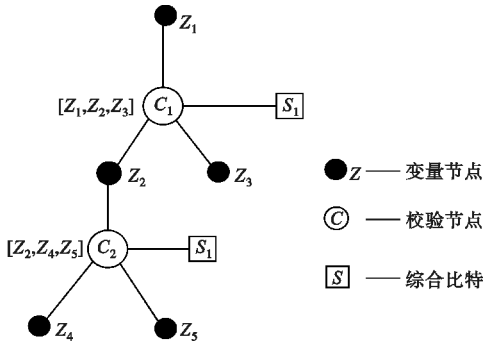


图 2 $\mathbf{H}$ 矩阵对应的 Tanner 图
Fig. 2 Tanner graph of the parity check matrix $\mathbf{H}$

如图 2 所示,在这个 Tanner 图中共有 3 种不同的节点:变化的点代表标记位,校验点代表校验矩阵 $\mathbf{H}$ 中的校验节点,综合节点代表的是信息位。变化的节点 Z_1, Z_2, Z_3 和第一个校验节点 C_1 的关系满足 $Z_1 + Z_2 + Z_3 = S_1$,同理对于校验节点 C_2 ,有 $Z_2 + Z_4 + Z_5$

$=S_2$ 。

假设非标记位的信息是固定的,每个标志位信息是在 0 和 1 之间取值,这两种取值对应星座图中的两个点分别有不同的功率。 $E_i(u_i)$ 定义了 $Z_i=U_i$ 时的能量。对应的映射后的能量为

$$E_i(u_i) = \|u_i a_i b_i c_i \cdot 1\|^2 \tag{2}$$

通过上式,这个整形问题可以转化为求

$$Z = \arg \min_{u: uH^T = s} \sum_{i=1}^n E_i(u_i) \tag{3}$$

的问题。其中,在 QAM 星座中,每个坐标的标记符号整形是分开的。

3.1 MPF 问题的引入

在文献[10]中已经提到了 MPF 问题。我们将用具体的标记去解决标记位整形问题。MPF 问题首先需要设置一个变量 $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$, 其中 $x_i \in \{0,1\}$ 。定义一个局部核心函数 $x_I, x_I = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}\}$, 其中 $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$, 这个函数是 x 的一个子集。定义 x 的 m 个子集 $x_{I_1}, x_{I_2}, \cdots, x_{I_m}$ 和对应的局部核心 $f_1(x_{I_1}), f_2(x_{I_2}), \cdots, f_m(x_{I_m})$, 那么整体的核心被定义为

$$F(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x_{I_i}) \tag{4}$$

式中, $x_{I_i} (i = 1, \cdots, m)$ 称为局部域。这个 MPF 问题需要在一个或多个子集 x_{I_i} 的基础上计算整体核心 F 的边缘。也就是说,要计算所有的 x_{I_i} (其中 I_i^c 是 I_i 的补集):

$$F_i(x_{I_i}) = \min_{x_{I_i^c}} F(x_{I_i}, x_{I_i^c}) \tag{5}$$

如果所有的局部域能被作为连接树的顶点,那么 MPF 问题就能用整体分配算法 (GDL) 求解。

3.2 整形化为 MPF 问题

我们用图 2 中的例子来介绍把树形整形化为 MPF 问题的想法。假设标记位 $(z_1, z_2, \cdots, z_5)$ 是 MPF 问题中的变量,那么局部域和局部核心为

局部域	局部核心
$\{z_1\}$	$\{E_1(z_1)\}$
...	...
$\{z_5\}$	$\{E_5(z_5)\}$
$\{z_1, z_2, z_3\}$	$\{\chi_1(z_1, z_2, z_3)\}$
$\{z_2, z_4, z_5\}$	$\{\chi_1(z_2, z_4, z_5)\}$

其中, $E_i(z_i)$ 是按照函数(2)中定义的, χ 是根据校验矩阵中校验节点 C_i 定义的函数:

$$\chi_i(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = s_i \\ \infty, & \text{if } x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \neq s_i \end{cases} \tag{6}$$

那么整体核心被看作是

$$F(z_1, \cdots, z_5) = \begin{cases} \sum E_i(z_i), & \text{if } zH^T = s, \\ \infty, & \text{if } zH^T \neq s, \end{cases} \tag{7}$$

每个局部域 $\{z_i\}$ 最终有

$$F_i(z_i) = \min_{z: zH^T = s} \sum_{i=1}^5 E(z_i) \tag{8}$$

$F_i(z_i)$ 中 u_i 的值是根据 $ZH^T = S$ 定义的最小能量编码的 i 个中最小的一个。由于陪集码字的最小能量是固定的,只需要找到每个节点对应的一个目标函数。如果校验矩阵的 Tanner 图是一个联结树,这个问题可以用一系列连续算法的顶点 GDL 算法解决。

3.3 最小和算法

我们通过将 $E_i = E_i(1) - E_i(0)$ 能量的不同作为 Z_i 的局部核心,介绍一种简化的最小和算法。基于标记位整形的最小和算法,通过树形码来在 Tanner 图中的各个节点间进行信息传递。一个节点接收到的信息在节点处处理,新的信息则沿着边送出去。假设边界 $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ 是与同一个节点相连的边, $\vec{m}_i$ 是边 e_i 接收到的信息, $\overleftarrow{m}_i$ 是通过 e_i 边送出的信息,其中 $i = 1, 2, \cdots, d$, 一个信息传递算法指出了一系列节点的过程。针对标记位整形,这个算法沿用连续方案,从最深的变量节点到根节点,其中根节点只有信息输出。针对于图中的树形编码信息的传递方向是

$$z_5 \rightarrow z_4 \rightarrow C_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_2 \rightarrow C_1 \rightarrow z_1$$

假设一个变量节点 z_i 有 $\vec{m}_1, \cdots, \vec{m}_d$ 个信息进来,那么输出的信息为

$$\overleftarrow{m} = E_j + \sum_{k=1}^d \overrightarrow{m}_k \tag{9}$$

假设一个校验节点 C_i 有 $\vec{m}_1, \cdots, \vec{m}_d$ 个信息进来,那么输出的信息为

$$\overleftarrow{m} = (1 - 2(s_i)) \left[\prod_{k=1}^d \text{sign}(\overrightarrow{m}_k) \right] \min_{k=1, \cdots, d} |\overrightarrow{m}_k| \tag{10}$$

每一个校验节点将累计的输入边位置对应到最小绝对信息上,即 $\arg \min_k |\overrightarrow{m}_k|$ 。在根节点,我们用下面的公式计算目标函数:

$$F_1 = E_1 + \sum_{i=1}^d \overrightarrow{m}_i \tag{11}$$

对于根变量节点 Z_1 , 判决规则是

$$Z_1 = \begin{cases} 0, & \text{if } F_1 > 0 \\ 1, & \text{if } F_1 \leq 0 \end{cases} \tag{12}$$

只要根节点的值确定了,我们就可以找到最小

能量的序列,通过校验节点中储存的变量节点反映射,这些校验节点是从根节点到最深的变量节点。这个和维特比算法里面的反映射很像。

4 实验结果

图3为LDLC码在AWGN信道下的仿真结果。本文仿真采用 $k=100$ 、 $n=201$ 的一个校验矩阵,即有 $k=100$ 个标记位,通过整形后有 $n=201$ 个码字,编码器的输入信息 b 采用二进制,即 b 的元素值取自于 -1 和 1 。我们用误码率(BER)和信噪比(SNR)对仿真结果进行描述。根据图1的编码调制系统图,在未编码前,星座图的平均功率为21.333;利用 $k=100$ 、 $n=201$ 的检验矩阵进行编码后,平均功率变为18.826,所以可以得到整形增益为0.528 dB。同时当 $CER=2$ 时,随着 k 的增加,编码增益可以达到0.53 dB。在该仿真中没有增加错误控制码,但在实际信道中一般会增加错误控制码,由于错误控制码在信息序列中占的比例很小,所以加入错误控制码后对该算法的编码增益基本没有影响。

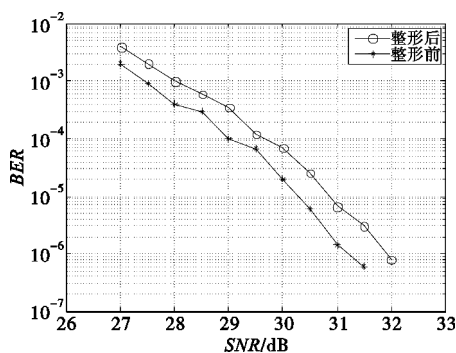


图3 AWGN信道下的仿真结果

Fig. 3 Simulation results on AWGN channel

5 结束语

本文借鉴标记位整形的思想,结合LDPC码的校验矩阵 H 和Tanner图,通过最小和算法找出功率最小的信息序列,从而达到整形的目的。该算法是在LDLC码进行编码之前对其信息序列进行处理,通过使用LDPC码,使得信息的平均功率得到减少。同时,该算法是针对信息序列本身进行处理,与其他整形方法不同,该算法没有参与LDLC码的编码过程,是一种完全独立的整形方法。仿真证明:整形前后产生了约0.53 dB的整形增益,与Sommer提出的基于下三角矩阵的整形方法相比,该方法具有普遍适用性,是一种有效的整形方法。

本文算法中整形码字采用的是非方阵的LDPC

码,由于校验矩阵是非方阵的,输入和输出的码字数不同,使得输出的码字增加了信息量,起到了整形的目的。而采用方阵LDPC码或是其他码字作为整形码字,将是下一步的研究方向。

参考文献:

- [1] Zhu Lian-xiang, Dai Gai-rong, Tang Ying. Principles of Low Density Lattice Codes and their Performance Simulation [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications, 2010, 22(2):58-60.
- [2] Sommer N, Feder M, Shalvi O. Low-density lattice codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 54(4):1561-1585.
- [3] 杨海艳. 一种构造八环准循环LDLC码的搜索算法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2011, 23(5):570-573.
YANG Hai-yan. A search algorithm to construct girth-8 quasi-cyclic LDLC[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2011, 23(5):570-573. (in Chinese)
- [4] Yona Y, Feder M. Efficient Parametric Decoder of Low Density Lattice Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 50(6):366-370.
- [5] Forney G D. Trellis Shaping[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38(2):281-300.
- [6] Erez U, Zamir R. Achieving $1/2 \lg(1 + \text{SNR})$ on the AWGN channel with lattice encoding and decoding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10):2293-2314.
- [7] Sommer N, Feder M, Shalvi O. Shaping Methods for Low-Density Lattice Codes [J]. IEEE Information Theory Workshop, 2009, 54(6):238-242.
- [8] Shalvi O, Sommer N, Feder M. Signal Codes[C]//Proceedings of 2003 Information Theory Workshop. Paris, France:IEEE, 2003:332-336.
- [9] Paterson K G, Tarokh V. On the existence and construction of good codes with low peak-to-average power ratios [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(9):1974-1987.
- [10] Srinivas A, McEliece R. The Generalized Distributive Law [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(2):325-343.

作者简介:



朱联祥(1971—),男,陕西人,博士后,教授、硕士生导师,主要从事无线定位、通信信号处理、数字信号处理技术、信息论与编码等方面的科研与教学工作;

ZHU Lian-xiang was born in Shaanxi Province, in 1971. He is now a professor with the Ph. D. degree and also the instructor of graduate students. His research interests include wireless positioning, communication signal processing, digital signal processing technology, information theory and coding.

Email: zhulx@cqupt.edu.cn

付孟孟(1988—),女,河南平顶山人,重庆邮电大学硕士研究生,主要研究方向为信道编码、信号与信息处理。

FU Meng-meng was born in Pingdingshan, Henan Province, in 1988. She is now a graduate student. Her research interests include channel coding, signal and information processing.

Email: fumenghappy@163.com