

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2013.06.012

# 波形未知信号时频差参数的最大似然估计算法\*

廖理<sup>1,\*\*</sup>, 张韬<sup>2</sup>

(1. 四川大学 通信与信息学院, 成都 610065; 2. 西南电子电信技术研究所, 成都 610041)

**摘要:**提出了波形未知确定信号时频差参数估计的最大似然算法, 得出利用互模糊函数可以实现此种信号条件下时频差参数最大似然估计的结论, 推导出了闭合形式的克拉美罗下界并对比了不同信号模型下的参数估计精度。仿真实验结果表明了估计算法和性能分析的正确性。

**关键词:**波形未知信号; 时频差参数估计; 最大似然算法; 克拉美罗下界

**中图分类号:** TN911; TN971.1   **文献标志码:** A   **文章编号:** 1001-893X(2013)06-0735-04

## A Maximum-Likelihood Algorithm for TDOA/FDOA Estimation of Unknown Deterministic Signals

LIAO Li<sup>1</sup>, ZHANG Tao<sup>2</sup>

(1. School of Communication and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China;

2. Southwest Research Institute of Electronic and Telecommunication Technology, Chengdu 610041, China)

**Abstract:** A Maximum-Likelihood algorithm for TDOA/FDOA estimation of unknown deterministic signals is proposed. It is shown that the algorithm leads calculation of the complex ambiguity function. The parameter estimation lower bound is calculated and compared in different signal models. Simulations are provided to support the theoretical results.

**Key words:** unknown deterministic signals; TDOA/FDOA estimation; maximum-likelihood algorithm; cramer-rao lower bound(CRLB)

### 1 引言

时频差(TDOA/FDOA)参数估计技术因其应用的广泛性在近几年中得到了大量的研究。不同的应用环境需要采用适当的时频差参数估计问题模型<sup>[1]</sup>, 从而得出相应的估计算法和性能下界。噪声和信号是时频差参数估计问题中由应用环境直接决定的。目前研究的噪声类型主要包括高斯白噪声、高斯色噪声、相关噪声、冲激噪声等, 在实际应用中, 不相关高斯白噪声仍然是最常见的, 因此我们假设问题模型中的噪声是不相关的高斯白噪声; 信号类型主要包括波形随机信号、波形已知信号和波形未知信号 3 种, 波形随机信号通常出现在主/被动声纳、被动雷达和传输环境复杂的数字通信中; 波形已知信号通常出现在主动雷达、导航以及有前导字的

数字通信中; 波形未知信号通常出现在被动雷达、被动定位中。波形随机信号和波形已知信号的时频差参数估计问题以及相应的性能下界已经在大量的文献中得到了深入的研究: Stein<sup>[2]</sup>在频域上得出了波形未知信号时频差参数的最大似然估计算法, 但没有分析其性能下界; 而 Yeredor 和 Angel<sup>[3]</sup>利用离散傅里叶变换和时频矩阵来表示两路接收信号, 得出了波形未知信号条件下时频差参数估计的 Fisher 信息矩阵(FIM), 但没有给出 CRLB 的闭合表达式; Weiss<sup>[4-6]</sup>分别讨论了波形随机和波形未知条件下的被动定位问题, 给出了辐射源位置矢量的估计算法和相应的 CRLB。

本文利用最大似然原理在时域上推导了波形未知信号条件下时频差参数的估计算法, 其最终形式与互模糊函数峰值法一致。该算法还可同时给出其他

\* 收稿日期: 2013-01-22; 修回日期: 2013-04-17    Received date: 2013-01-22; Revised date: 2013-04-17

\*\* 通讯作者: liaoli1982@hotmail.com    Corresponding author: liaoli1982@hotmail.com

未知参数(包括相对增益、相对相位偏移)和未知信号波形采样的估计值。根据文献[2,5]的思路得出波形未知信号条件下时频差参数估计 CRLB 的闭合表达式,最后比较了实际参数估计算法的性能与 3 种信号条件下的 CRLB,并解释了结果的物理意义。

全文结构安排如下:第 2 节给出了时频差参数估计问题的数学模型并详细讨论不同信号波形假设条件的意义,第 3 节得出波形未知条件下时频差参数的最大似然估计算法,第 4 节计算波形未知条件下时频差参数估计 CRLB 的闭合表达式,第 5 节利用仿真实验验证理论分析的正确性,最后一节总结全文。

## 2 问题模型

不失一般性,时频差参数估计问题中两路接收信号的复基带表达式为

$$r_1(t) = s(t) + w_1(t) \tag{1}$$

$$r_2(t) = ae^{j\varphi}e^{j\omega t}s(t - \tau) + w_2(t) \tag{2}$$

其中,  $w_1(t)$  和  $w_2(t)$  是相互独立的高斯白噪声,其功率谱密度分别为  $N_1$  和  $N_2$ ;  $a$  表示相对增益;  $\varphi$  表示相对相位偏移;  $\tau$  和  $\omega$  分别表示两路信号的时差和频差,  $s(t)$  是波形未知的确定信号,带宽为  $B$ ,观测区间为  $-T/2 \leq t < T/2$ ,且观测时间  $T$  满足  $|\tau| \ll T$  和  $BT \gg 1$ ,即观测时间远大于两路信号的时差以及信号的相干时间。如果  $w_1(t) = 0$ ,即第一路信号不含噪声(这种情况发射在波形信号已知或者可接收到理想参考信号条件下),则  $r_1(t) = s(t)$ ,此时波形未知信号时频差参数估计问题就转化为波形已知信号时频差参数估计问题,因此后者可作为前者的特例。

将两路接收信号离散化,设采样间隔为  $T_s \geq 1/2B$ ,采样点数为  $N$ ,则两路接收信号的离散表达式为

$$r_1[n] = s[n] + w_1[n] \tag{3}$$

$$r_2[n] = ae^{j\varphi}e^{j\omega n T_s}s_\tau[n] + w_2[n] \tag{4}$$

其中,  $-N/2 \leq n < N/2 - 1$ ,噪声采样值序列  $\{w_i[n], i = 1, 2\}$  是相互独立的平稳随机变量,其均值为零,方差为  $\sigma_i^2 = N_i/T_s$ ,两路信号采样值分别为  $s[n] = s(nT_s)$ 、 $s_\tau[n] = s(nT_s - \tau)$ 。定义信号和噪声矢量:

$$\mathbf{r}_1 = \{r_1[-N/2], \dots, r_1[N/2 - 1]\}^T$$

$$\mathbf{r}_2 = \{r_2[-N/2], \dots, r_2[N/2 - 1]\}^T$$

$$\mathbf{s} = \{s[-N/2], \dots, s[N/2 - 1]\}$$

$$\mathbf{s}_\tau = \{s_\tau[-N/2], \dots, s_\tau[N/2 - 1]\}$$

$$\mathbf{w}_i = \{w_i[-N/2], \dots, w_i[N/2 - 1]\}$$

$$\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T \quad \mathbf{r}_2^T]^T$$

由 DFT 的性质可知,在  $|\tau| \ll T$  的假设条件下近似有  $\mathbf{s}_\tau = \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{s}$ ,其中  $\mathbf{F}$  表示 DFT 变换矩阵,  $\mathbf{D}_\tau$  是时移矩阵,  $\mathbf{D}_v$  是频移矩阵,其具体定义如下:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n}^T\right)$$

$$\mathbf{D}_\tau = \text{Diag}\left\{\exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \tau \cdot \mathbf{n}\right)\right\}$$

$$\mathbf{D}_v = \text{Diag}\{\exp(j\omega T_s \cdot \mathbf{n})\}$$

$$\mathbf{n} = \left[-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right]^T$$

因此接收信号可表示为<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s} + \mathbf{w}_1 \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_2 = ae^{j\phi} \mathbf{D}_v \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{w}_2 \tag{6}$$

定义未知参数矢量

$$\boldsymbol{\theta} = [a, \phi, \tau, \omega]^T$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\Re\{\mathbf{s}^T\}, \Im\{\mathbf{s}^T\}, \boldsymbol{\theta}^T]^T$$

由假设条件可知  $\mathbf{w}_1$  和  $\mathbf{w}_2$  是独立的复循环高斯随机矢量,因此  $\mathbf{r} \sim CN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$ ,均值矢量  $\boldsymbol{\mu}$  和协方差矩阵  $\boldsymbol{\Lambda}$  分别为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ ae^{j\phi} \mathbf{Q} \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{bmatrix}$$

其中两路接收信号的噪声协方差矩阵为  $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \sigma_1^2 \cdot \mathbf{I}$  和  $\boldsymbol{\Lambda}_2 = \sigma_2^2 \cdot \mathbf{I}$ ,时频移矩阵  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_v \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F}$  满足关系式

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H = \mathbf{I} \tag{7}$$

## 3 最大似然估计算法

由上述定义可知,接收信号矢量  $\mathbf{r}$  的对数似然函数

$$L(\boldsymbol{\xi}) = \ln p(\mathbf{r} | \boldsymbol{\xi}) =$$

$$\frac{1}{\sigma_2^2} (ae^{j\varphi} \mathbf{r}_2^H \mathbf{Q} \mathbf{s} + ae^{-j\varphi} \mathbf{s}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2 - a^2 \mathbf{s}^H \mathbf{s}) +$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2} (\mathbf{r}_1^H \mathbf{s} + \mathbf{s}^H \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}^H \mathbf{s}) + C \tag{8}$$

其中,  $C$  表示与待估参数矢量无关的常数值。因此待估参数矢量  $\boldsymbol{\xi}$  的最大似然估计为

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \arg \max_{\boldsymbol{\xi}} L(\boldsymbol{\xi}) \tag{9}$$

由  $\frac{\partial L(\boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}$  可得

$$\mathbf{s} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{a^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2} \cdot \left[ \frac{1}{\sigma_1^2} \mathbf{r}_1 + \frac{ae^{-j\varphi}}{\sigma_2^2} \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2 \right] \tag{10}$$

将其代入  $L(\boldsymbol{\xi})$  的表达式可得

$$L_1(\xi) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{a^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left( \frac{1}{\sigma_1^4} \| \mathbf{r}_1 \|^2 + \frac{a^2}{\sigma_2^4} \| \mathbf{r}_2 \|^2 \right) + \frac{2a}{a^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2} | \mathbf{r}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2 | \cos(\psi - \varphi) + C_1 \quad (11)$$

其中,  $C_1$  是与待估参数矢量无关的值, 相位  $\psi = \arg(\mathbf{r}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2)$ 。最大化  $L(\xi)$  等价于最大化  $L_1(\xi)$ , 而最大化  $L_1(\xi)$  可通过选择  $\tau$  和  $v$  使  $| \mathbf{r}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2 |$  最大, 然后选择相位偏移  $\varphi = \arg(\mathbf{r}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2)$ , 将上述估计值代入  $L_1(\xi)$  选择  $a$  使其后两项之和最大。将这些估计值代入  $\mathbf{s}$  的表达式可以得到信号样值序列的估计。

将矩阵  $\mathbf{Q}$  的表达式代入归一化后的目标函数可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} | \mathbf{r}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{r}_2 | &= \\ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} r_1^*(nT_s) r_2(nT_s + \tau) e^{-j\omega n T_s} e^{-j\omega T_s \tau} \right| &= \\ \left| \frac{1}{NT_s} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} r_1^*(nT_s) r_2(nT_s + \tau) e^{-j\omega n T_s} T_s \right| &= \\ \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r_1^*(t) r_2(t + \tau) e^{-j\omega t} dt \right| &= \\ \text{CAF}(\tau, \omega) & \quad (12) \end{aligned}$$

其中,  $\text{CAF}(\tau, \omega)$  表示两路接收信号的互模糊函数, 所以有时频差参数的最大似然估计

$$(\hat{\tau}, \hat{\omega})_{\text{ML}} = \arg \max_{(\tau, \omega)} \text{CAF}(\tau, \omega) \quad (13)$$

因此, 波形未知信号时频差参数估计可通过确定两路接收信号互模糊函数的峰值位置来实现, 这与 Stein<sup>[2]</sup> 的结论是一致的。

## 4 性能分析

CRLB 由于其计算简单、物理意义清晰而在参数估计领域得到了广泛的应用, 它表示在一定的条件下参数估计的方差可能达到的最小值。不同的信号模型和先验信息会导致同一问题具有不同的 CRLB。文献[3]得出了波形未知信号参数矢量  $\xi = [\varphi, \tau, \omega]^T$  的 Fisher 信息矩阵为

$$\mathbf{J} = \frac{2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 / a^2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}^H \mathbf{s} & -\mathbf{s}^H \mathbf{s}' & T_s^H \bar{\mathbf{N}}_s \\ -\mathbf{s}^H \mathbf{s}' & \mathbf{s}'^H \mathbf{s}' & -\Re\{T_s'^H \mathbf{Q}^H \bar{\mathbf{N}}_s\} \\ T_s^H \bar{\mathbf{N}}_s & -\Re\{T_s'^H \mathbf{Q}^H \bar{\mathbf{N}}_s\} & T_s^H \bar{\mathbf{N}}_s^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{Q} \mathbf{s} \quad (15)$$

$$\mathbf{s}' = \frac{2\pi}{N} F^H \bar{\mathbf{N}} F \mathbf{s} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \text{Diag}\{\mathbf{n}\} \quad (17)$$

注意, 上述 Fisher 信息矩阵中某些项多了系数  $T_s$ , 这是由于文献[10]中假设了  $T_s = 1$  并且使用了归一化频差, 而本文没有采用这一假设导致的。

下面推导在此条件下时频差参数估计 CRLB 的闭合表达式。定义信号能量为

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (18)$$

两路接收信号的信噪比分别为  $\text{SNR}_1 = E_s / N_1$  和  $\text{SNR}_2 = a^2 E_s / N_2$ 。当观测区间趋于无穷即  $T \rightarrow \infty$  时利用时频变量的定义可得

$$T_s \mathbf{s}^H \mathbf{s} = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E_s \quad (19)$$

$$-T_s \mathbf{s}^H \mathbf{s}' = -E_s \bar{\omega} \quad (20)$$

$$T_s^2 \bar{\mathbf{s}}^H \bar{\mathbf{N}}_s \bar{\mathbf{s}} = E_s (\bar{t} + \tau) \quad (21)$$

$$T_s \mathbf{s}'^H \mathbf{s}' = E_s \bar{\omega}^2 \quad (22)$$

$$-\Re\{T_s^2 \bar{\mathbf{s}}^H \mathbf{Q}^H \bar{\mathbf{N}}_s\} = E_s (-\bar{\omega} \tau - \bar{\omega} \tau) \quad (23)$$

$$T_s^3 \bar{\mathbf{s}}^H \bar{\mathbf{N}}_s^2 \bar{\mathbf{s}} = E_s (\bar{t}^2 + 2\bar{t}\tau + \tau^2) \quad (24)$$

将上述表达式代入 Fisher 信息矩阵有

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{2E_s}{T_s \sigma_1^2 + T_s \sigma_2^2 / a^2} \cdot \mathbf{H} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{SNR}_1} + \frac{1}{\text{SNR}_2} \right)} \cdot \mathbf{H} = \text{SNR} \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (25)$$

其中:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\omega} & \bar{t} + \tau \\ -\bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & -\bar{\omega} \tau - \bar{\omega} \tau \\ \bar{t} + \tau & -\bar{\omega} \tau - \bar{\omega} \tau & \bar{t}^2 + 2\bar{t}\tau + \tau^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\frac{1}{\text{SNR}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{SNR}_1} + \frac{1}{\text{SNR}_2} \right) \quad (27)$$

所以 Fisher 信息矩阵的逆为

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\text{SNR}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \quad (28)$$

其中:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/(\beta^2 \delta^2 - \alpha^2) & * & \# \\ * & \delta^2/(\beta^2 \delta^2 - \alpha^2) & @ \\ \# & @ & \beta^2/(\beta^2 \delta^2 - \alpha^2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

因此时频差参数估计的 CRLB 为

$$\text{CRLB}(\tau) = \frac{1}{\text{SNR}} \frac{\delta^2}{\beta^2 \delta^2 - \alpha^2} \quad (30)$$

$$CRLB(v) = \frac{1}{SNR} \frac{\beta^2}{\beta^2 \delta^2 - \alpha^2} \quad (31)$$

该表达式与波形已知条件下单路信号时延频偏参数估计的 CRLB 的形式相同,只是等效信噪比的定义不同。也就是说,只要是确定信号,波形是否已知不影响时频差参数估计的精度。同时,功率谱密度函数在通带范围内为常数的随机信号时频差参数估计的 CRLB 也可表示为这种形式,其中的时频参数由信号的功率谱密度函数定义,等效信噪比满足

$$\frac{1}{SNR} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{SNR_1} + \frac{1}{SNR_2} + \frac{1}{SNR_1 SNR_2} \right)$$

### 5 仿真结果

仿真采用的源信号表达式为

$$s(t) = \sqrt{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(t-t_c)^2 + j\omega_c(t-t_c) + j\frac{1}{2}\mu(t-t_c)^2 \right\} \quad (32)$$

其中选择参数  $t_c = 1, \omega_c = 1$  和  $\mu = 1$ 。

为简单起见,设置两路接收信号相对幅度  $a = 1$ ,相对相移  $\varphi = 0$ ,时差  $\tau = 0$  和频差  $v = 0$ ,并假设信号在传输过程中受到加性高斯白噪声的影响,这种假设符合实际工程系统中各接收机距离较远时的噪声条件。同时假设每路信号信噪比相同,统计结果基于 100 次最大似然参数估计实验。图 1 和图 2 分别显示了时差和频差参数估计 CRLB 随输入信噪比的变化曲线以及实际参数估计精度随输入信噪比的变化曲线。为方便比较,同时给出了单路时延频偏参数估计的 CRLB 和相同时频参数条件下随机信号时频差参数估计的 CRLB。从图中可以看出,在高信噪比条件下时频差参数的最大似然估计与 CRLB 接近而在低信噪比条件下相差很大,这说明 CRLB 是一种渐进的性能下界。实验结果也表明了算法和性能分析的正确性。

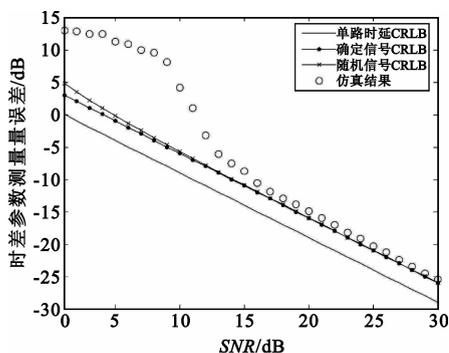


图 1 时差参数估计 CRLB  
Fig.1 CRLB of TDOA estimation

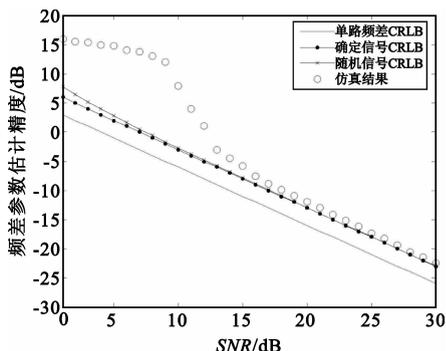


图 2 频差参数估计 CRLB  
Fig.2 CRLB of FDOA estimation

### 6 结束语

本文从波形未知信号的离散表达式入手,推导了此种情况下两路接收信号的时频差参数最大似然估计可以利用通常的互模糊函数方法来实现,同时在文献[3]的基础上,进一步推导出波形未知信号时频差参数估计 CRLB 的闭合表达式,得出其性能下界与波形已知信号条件下的性能下界相同,即信号波形的先验信息不影响时频差参数估计精度的结论,最后利用仿真实验验证了理论结果的正确性。

### 参考文献:

- [1] Fowler M L, Hu Xi. Signal Models for TDOA/FDOA Estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(4): 1543 - 1550.
- [2] Stein S. Differential Delay/Doppler ML Estimation with Unknown Signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(8): 2717 - 2719.
- [3] Yeredor A, Angel E. Joint TDOA and FDOA Estimation: A Conditional Bound and Its Use for Optimally Weighted Localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(4): 1612 - 1623.
- [4] Weiss A J. Direct Geolocation of Wideband Emitters Based on Delay and Doppler[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(6): 2513 - 2521.
- [5] Amar A, Weiss A J. Localization of Narrowband Radio Emitters Based on Doppler Frequency Shifts[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(11): 5500 - 5508.
- [6] Weiss A J, Amar A. Direct Geolocation of Stationary Wideband Radio Signal Based on Time Delays and Doppler Shifts [C]//Proceedings of 2009 IEEE/SP 15th Workshop on Statistical Signal Processing. Cardiff: IEEE, 2009: 101 - 104.

### 作者简介:



廖理(1982—),男,四川资阳人,硕士,工程师,主要研究方向是统计信号处理和参数估计;

LIAO Li was born in Ziyang, Sichuan Province, in 1982. He is now an engineer with the M. S. degree. His research concerns statistical signal processing and parameter estimation.

Email: liaoli1982@hotmail.com

张韬(1981—),男,四川巴中人,博士,工程师,主要研究方向为统计信号处理。

ZHANG Tao was born in Bazhong, Sichuan Province, in 1981. He is now an engineer with the Ph. D. degree. His research concerns statistical signal processing.