

doi: 10.3969/j.issn.1001-893x.2013.02.010

# 一种修正的矢量奇异值分解 DOA 估计算法\*

谢 鑫\*\*, 路翠华, 李国林

(海军航空工程学院 7 系, 山东 烟台 264001)

**摘 要:**在均匀线性阵列模型下,特征矢量奇异值分解算法能够对相干信号进行 DOA 估计,但相干和不相关信号同时存在时,算法的估计会出现错误。针对这一问题,提出了一种修正算法(MESVD),该算法选取经过加权处理的特征向量来构造矩阵,并利用该矩阵进行子空间估计。理论分析和数值仿真证明:修正后的算法能够正确估计相干、相关和不相关信号,估计性能与空间平滑算法(FBSS)相当。

**关键词:**DOA 估计;相干信号;奇异值分解;不相关信号

**中图分类号:**TN911.7;TN97 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-893X(2013)02-0162-04

## A Modified ESVD Algorithm for DOA Estimation

XIE Xin, LU Cui-hua, LI Guo-lin

(The 7th Department, Naval Aeronautics and Astronautics University, Yantai 264001, China)

**Abstract:**The Extended Singular Value Decomposition(ESVD) algorithm can deal with the coherent signals exactly in Uniform Linear Array(ULA), but when the coherent signals and the uncorrelated signals inject at the same time, the ESVD algorithm usually gives incorrect result. According to this problem, a modified algorithm (MESVD) is proposed, which uses a weighted eigenvector to construct a matrix for subspaces estimation. Analysis and simulations show that the MESVD algorithm can give right estimation without considering the relativity of signals and its estimation performance is corresponding to that of FBSS algorithm.

**Key words:**DOA estimation; coherent signal; singular value decomposition; uncorrelated signal

### 1 引 言

到达角(DOA)估计是阵列信号处理研究的主要问题之一,在无线电通信、电子侦察等领域有着广泛的应用。子空间类算法由于其超分辨率能力而成为 DOA 估计算法的重要分支,但该类算法都不能直接对相关或者相干信号进行有效估计,要利用此类算法,都需要预先进行解相关处理。传统的解相关处理一般是采用空间平滑技术,包括前后向平滑算法(FBSS)及其多种变形<sup>[1-3]</sup>,该类算法存在的问题在于需要先对接收数据的协方差矩阵(记为  $R_{XX}$ )进行空间平滑处理以实现解相关,该处理增加了计算量,减小了阵列孔径;特别是进行空间平滑的子阵个数

和相关入射信号的个数有关,而在大多数情况下,相关入射信号的个数是无法预知的,这就限制了空间平滑类算法的应用。文献[4]提出了一种基于  $R_{XX}$  的迭代解相关算法,该算法能直接应用于非均匀阵列和圆阵列,但运算量较大。奇异值分解(ESVD)算法<sup>[5]</sup>能够实现对相干信号的 DOA 估计,且估计精度要优于 FBSS,但该类算法对相关信号的 DOA 估计会出现较大偏差,同时,该算法需要进行两次特征值分解,运算量较大,这在很大程度上限制了该算法的应用。而随着多级维纳滤波(MSWF)<sup>[6-7]</sup>等快速子空间估计方法的研究进展,ESVD 算法的运算量有望大大缩减,因此,本文针对相干信号与不相关信号同时存在的信号环境,对 ESVD 算法进行修正,希望能够扩展其应用范围。

\* 收稿日期:2012-06-12;修回日期:2012-09-24 Received date:2012-06-12;Revised date:2012-09-24

\*\* 通讯作者:xxin1980@163.com Corresponding author:xxin1980@163.com

## 2 信号模型

考虑一个由  $N$  个全向阵元组成的均匀线性阵列,阵列间距为  $d$ ,如图 1 所示。

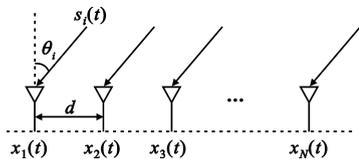


图 1 均匀线性阵列  
Fig.1 Uniform linear array

假设  $M$  个远场窄带信号 ( $M < N$ ) 分别从  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) 方向入射到接收阵列,且入射波信号和噪声不相关,以阵元 1 为参考阵元,则第  $k$  个阵元的输出信号可表示为

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^M s_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_i} d(k-1) \sin\theta_i} + n_k(t) \quad (1)$$

其中,  $s_i(t)$  为第  $i$  个信号的复包络,  $\lambda_i$  为其中心波长,  $n_k(t)$  为第  $k$  个阵元中的零均值高斯加性白噪声。

则阵列的输出信号矢量可表示为

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)] \quad (3)$$

为  $N \times M$  维阵列流形矩阵,该矩阵的秩为  $M$ ,  $\mathbf{a}(\theta_i)$  为对应的方向向量,且有

$$\mathbf{a}_k(\theta_i) = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_i} d(k-1) \sin\theta_i}, k = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T \quad (5)$$

为  $M$  个人射信号矢量。

$$\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T \quad (6)$$

为噪声矩阵,其中  $n_i(t)$  为第  $i$  个阵元中的零均值高斯加性白噪声,方差为  $\sigma^2$ ,且满足

$$E[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)] = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (7)$$

$$E[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^T(t)] = \mathbf{0} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{I}$  表示  $N \times N$  维单位阵,上标 H 表示共轭转置,上标 T 表示转置。

## 3 奇异值分解算法<sup>[8]</sup>

基本的子空间类算法(如 MUSIC)首先计算接收数据的协方差矩阵

$$\mathbf{R}_{XX} = \overline{\mathbf{X}\mathbf{X}^H} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^H\mathbf{A}^H} + \overline{\mathbf{N}\mathbf{N}^H} \quad (9)$$

对  $\mathbf{R}_{XX}$  进行分解可以分别得到由信号特征矢量张成的信号子空间和由噪声特征矢量张成的噪声子空间,且信号源完全不相关时,信号子空间的维数等于信号源数,信号特征矢量与阵列流形矢量张成同

一个信号子空间。而当信号源相干时,信号子空间的维数会减少。已证明<sup>[9]</sup>,此时的信号特征矢量与阵列流形之间仍然满足一定的线性关系。

设信号协方差矩阵的秩为  $K$  ( $K \leq M$ ),若噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_N$  为满秩矩阵,则有如下线性关系满足:

$$\mathbf{R}_N \mathbf{e}_k = \sum_{n=1}^M \alpha_k(n) \mathbf{a}(\phi_n) \quad (10)$$

式中,  $1 \leq k \leq K$ ,  $\mathbf{e}_k$  为特征矢量,  $\alpha_k(n)$  为线性组合因子。

显然,当噪声为理想白噪声时,噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_N = \sigma^2 \mathbf{I}$ ,则式(10)可简化为

$$\mathbf{e}_k = \sum_{n=1}^M \frac{\alpha_k(n)}{\sigma^2} \mathbf{a}(\phi_n) \quad (11)$$

下面不妨将  $\frac{\alpha_k(n)}{\sigma^2}$  直接记为  $\alpha_k(n)$ 。可见,无论入射信号是否相关,对应于大特征值的特征矢量是各阵列流形的一个线性组合。那么,当入射信号完全相干时,数据协方差矩阵的秩  $K = 1$ ,此时式(11)左边只有一个最大特征值对应的特征矢量,同时也表明该特征矢量包含所有入射信号的信息。因此,利用该特征矢量构造如下矩阵<sup>[51]</sup>:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1p} \\ e_{12} & e_{13} & \cdots & e_{1p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1m} & e_{1m+1} & \cdots & e_{1N} \end{pmatrix} \quad (12)$$

该矩阵可表示为如下形式:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_d \mathbf{A}_2^T \quad (13)$$

其中:

$$\mathbf{R}_d = \text{diag}[\alpha_1(1) \quad \alpha_1(2) \quad \cdots \quad \alpha_1(N)] \quad (14)$$

矩阵  $\mathbf{A}_1$  和  $\mathbf{A}_2$  分别为  $M$  个信号组成的维数为  $m \times M$  和  $p \times M$  的阵列流形。

因此,  $\mathbf{Y}$  一般是一个长方形,而不是方阵,则可对  $\mathbf{Y}$  进行奇异值分解,可得

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^H \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{A}$  为一个由奇异值组成的  $m \times p$  维矩阵,  $\mathbf{U}$  为左奇异矩阵,  $\mathbf{V}$  为右奇异矩阵。

则理想情况下矩阵  $\mathbf{Y}$  的大奇异值个数为  $M$ ,左奇异矩阵中小奇异值对应的矢量张成的空间即为噪声子空间,大奇异值对应的矢量张成信号子空间,此时结合 MUSIC,即可对入射信号进行 DOA 估计。

## 4 修正的 ESVD 算法

ESVD 采用最大特征矢量构造矩阵  $\mathbf{Y}$ ,这一矢量的选取在入射信号完全相干时无疑是最佳的,而当入射信号中同时存在不相关和相干信号时,会存在几个

大特征矢量。由式(11)可知,每个大特征矢量都含有入射信号信息,但此时若选取其中最大特征矢量 $e_1$ ,其中包含的非相关信号的能量可能会减弱,在信噪比较低时,会造成对不相关信号的 DOA 估计失败。

取阵元数为 15,4 个等功率信号分别从  $-20^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $12^\circ$ 、 $45^\circ$  方向入射,其中  $12^\circ$  方向信号与其他 3 个信号不相关,在 10 dB 信噪比条件下,采样 200 次快拍,采用 ESVD 算法进行 DOA 估计仿真,选取信号特征矢量矩阵的第 1 列构造矩阵  $Y$ ,同时图中加入了 FBSS 算法作为对比,得到仿真结果如图 2 所示。

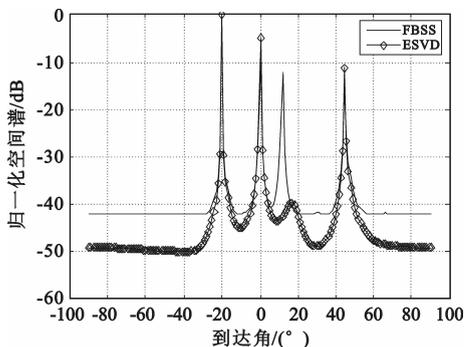


图 2 ESVD 算法 DOA 估计  
(选取信号特征矢量矩阵的第 1 列构造矩阵  $Y$ )  
Fig.2 DOA estimation with ESVD(choose the 1st column of eigenvector to construct matrix  $Y$ )

从图中可以看出,ESVD 算法能够成功估计 3 个相干入射信号,估计性能略优于 FBSS,但是对于  $12^\circ$  方向上的非相关入射信号却产生了信号丢失;而此时信号协方差矩阵的大特征值不止 1 个,若换取信号特征矢量矩阵的第 2 列构造矩阵  $Y$ ,估计结果则如图 3 所示。与前一仿真相反,此时仅正确估计出了  $12^\circ$  方向的信号,这也恰好说明了不同的大特征矢量所包含的信号信息是不同的。

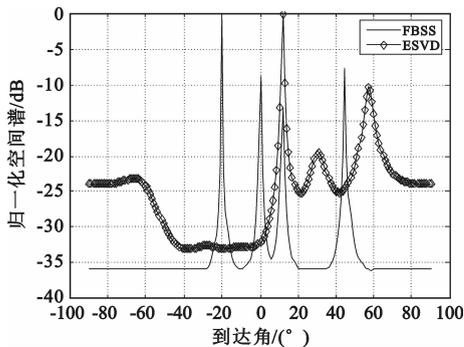


图 3 ESVD 算法 DOA 估计  
(选取信号特征矢量矩阵的第 2 列构造矩阵  $Y$ )  
Fig.3 DOA estimation with ESVD(choose the 2nd column of eigenvector to construct matrix  $Y$ )

上面的分析和仿真给我们一个启示:当入射信号同时含有相关和非相关信号时,特征值分解得到的几个大特征矢量所包含的入射信号信息各不相同,取其中某一个特征矢量进行的 ESVD 算法都难以完成所有信号 DOA 估计。因此,需要对 ESVD 算法进行修正,修正的 ESVD 算法 (MESVD) 选取所有大特征矢量之和  $e_{sum}$  来构造矩阵  $Y$ ,即:

$$e_{sum} = \sum_{k=1}^K e_k = \sum_{n=1}^M [(\sum_{k=1}^K \alpha_k(n)) a(\phi_n)] \quad (16)$$

显然,  $e_{sum}$  同样为阵列流形矢量的线性组合,且  $e_{sum}$  更全面地包含了所有入射信号的信息。以  $e_{sum}$  构造矩阵  $Y$  时,

$$R_d = \text{diag} \left[ \sum_{k=1}^K \alpha_k(1) \quad \sum_{k=1}^K \alpha_k(2) \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^K \alpha_k(M) \right] \quad (17)$$

$A_1$  和  $A_2$  不变,可见,矩阵  $Y$  的性质不变,同样可对其进行奇异值分解并得到信号子空间和噪声子空间。

采用与前一仿真中相同的条件,利用 MESVD 算法进行 DOA 估计仿真计算,结果如图 4 所示。从图中可见,在入射信号同时包含相关和不相关信号时,修正的 ESVD 算法能够准确估计出所有入射信号的 DOA,估计性能与 FBSS 相当。

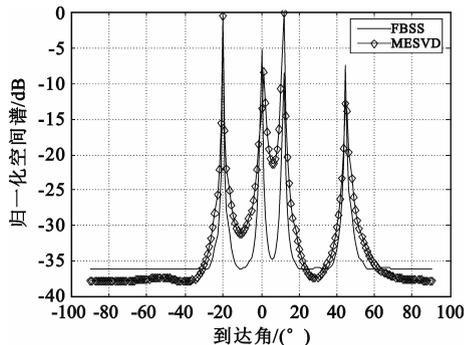


图 4 MESVD 算法 DOA 估计  
Fig.4 DOA estimation with MESVD

### 5 结论

综上所述,本文通过仿真分析和理论推导,对 ESVD 算法进行了修正,修正后的算法解决了 ESVD 算法在相干信号和不相关信号同时存在时不能正确进行 DOA 估计的问题。仿真结果表明, MESVD 算法能够实现相干和相关信号的 DOA 估计,估计精度与 FBSS 相当。因此,修正后的算法大大降低了 ES-

VD 类算法的应用条件,增强了算法的鲁棒性,而且该算法的优势还在于能够结合新兴的多级维纳滤波(MSWF)方法实现特征向量的快速估计,从而提高运算速度。

### 参考文献:

- [1] 刘云. 目标定向及多波束实现[D]. 西安:西北工业大学,2002.  
LIU Yun. Object Finding and Multi-beamforming Implementation[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2002. (in Chinese)
- [2] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4):67-94.
- [3] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, AP-34(3):276-280.
- [4] Kaneko K, Sano A. Music-like iterative DOA estimation in multipath environments[C]//Proceedings of the 5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop. Darmstadt, Germany:IEEE,2008:212-215.
- [5] Di A. Multiple sources location-a matrix decomposition approach[J]. IEEE Transactions on ASSP,1985,33(4):1086-1091.
- [6] 刘红明,何子述,夏威,等. 无参考信号条件下基于MSWF的DOA估计算法[J]. 电子学报,2010,38(9):1979-1983.  
LIU Hong-ming, HE Zi-shu, XIA Wei, et al. Estimation of Direction of Arrival Based on MSWF Without Reference Signal[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(9):1979-1983. (in Chinese)
- [7] 李堰,宋爱民,刘剑. 多级维纳滤波测向算法的参考信号优化方法[J]. 电讯技术,2010,50(12):75-80.

LI Yan, SONG Ai-min, LIU Jian. Reference Signal Optimization Method of Multistage Wiener Filter Direction-Finding[J]. Telecommunication Engineering, 2010, 50(12):75-80. (in Chinese)

- [8] 高世伟,保铮. 利用数据矩阵分解实现对空间相关信号源的超分辨率处理[J]. 通信学报,1988,9(1):4-13.  
GAO Shi-wei, BAO Zhen. Super resolution processing of space correlated signal resource using data matrix decompose[J]. Journal of Communications, 1988, 9(1):4-13. (in Chinese)
- [9] 王永良,陈辉,彭应宁,等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.  
WANG Yong-liang, CHEN Hui, PENG Ying-ning, et al. Space Spectrum Estimation Theory and Algorithm[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2004. (in Chinese)

### 作者简介:



谢鑫(1980—),男,湖北随州人,2010年获博士学位,现为讲师,主要研究方向为引信信号处理;

XIE Xin was born in Suizhou, Hubei Province, in 1980. He received the Ph. D. degree in 2010. He is now a lecturer. His research concerns fuze signal processing.

Email: xxin1980@163.com

路翠华(1978—),女,山东烟台人,2011年获博士学位,现为讲师,主要研究方向为引信信号处理;

LU Cui-hua was born in Yantai, Shandong Province, in 1978. She received the Ph. D. degree in 2011. She is now a lecturer. Her research concerns fuze signal processing.

李国林(1955—),男,吉林永吉人,教授、博士生导师,主要研究方向为电子对抗、引信技术。

LI Guo-lin was born in Yongji, Jilin Province, in 1955. He is now a professor and also the Ph. D. supervisor. His research concerns EW, fuze technology.