

文章编号: 1001 - 893X(2012)03 - 0318 - 05

一种基于矩阵三对角化分解的 DOA 估计算法*

邱新建^{1,2}, 山拜·达拉拜¹, 薛凤凤³

(1. 新疆大学 信息科学与工程学院 智能信号处理实验室, 乌鲁木齐 830046;

2. 解放军 68207 部队, 甘肃 酒泉 735000; 3. 空军工程大学 电讯工程学院, 西安 710077)

摘要: 针对 DOA (Direction of Arrival) 估计在低信噪比的情况下估计性能下降的问题, 根据阵列协方差矩阵共轭对称的特点, 采用基于 Givens 变换的三对角化分解方法对协方差矩阵进行三对角化, 同时利用盖氏 (Gerschgorin) 圆递推方法准确估计信号子空间的秩, 然后再对三对角矩阵进行对角化, 估计出噪声子空间, 利用噪声子空间与导向矢量正交实现波达方向估计, 改善了低信噪比背景下估计的误差性能和稳健性。计算机仿真证明了算法的有效性。

关键词: 阵列信号处理; DOA 估计; 三对角化分解; Givens 变换; 子空间估计

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.1001-893x.2012.03.013

A DOA Estimation Algorithm Based on Matrix Tri - diagonal Decomposition

QIU Xin-jian^{1,2}, SENBAI Dalabaev¹, XUE Feng-feng³

(1. Intelligent Signal Processing Laboratory, College of Information Science and Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830046, China; 2. Unit 68207 of PLA, Jiuquan 735000, China;

3. Telecommunications Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: The direction of arrival (DOA) estimation performance declines in low signal - to - noise ratio (SNR). According to the array covariance matrix conjugate symmetrical characteristic, tri - diagonal decomposition based on Givens transformation is adopted to three diagonalize covariance matrix, at the same time the cover's round recursive method is used to estimate signal subspace of rank accurately, and then diagonalize the three diagonal matrix, estimate the noise subspace, and utilize the orthogonal of noise subspace and wire vector to realize DOA estimation. The estimation error and robustness under the low SNR condition are improved. Computer simulation proves the efficiency of the method.

Key words: array signal processing; DOA estimation; tri - diagonal decomposition; Givens transformation; subspace estimation

1 引言

波达方向估计现在已经被广泛应用于通信、雷达、声纳等众多领域,最常用的算法是 Schmit 提出的

多重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC) 算法^[1]。对 MUSIC 算法进行改进的算法很多,这些算法步骤大致相同,都需要先对阵列的协方差矩阵进行特征分解,通过比较分解得到的特征值的数值

* 收稿日期: 2011 - 09 - 28; 修回日期: 2012 - 01 - 04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60971130)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No. 60971130)

大小来分离信号子空间和噪声子空间,然后利用噪声子空间与信号导向矢量的正交特性来估计信号到达方向。当在低信噪比时协方差矩阵特征值的扰动会非常大,分离信号子空间与噪声子空间将变得很困难,估计得到的值方差很大,往往难以满足实际要求。文献[2-3]通过引入多级维纳滤波器(Multi-stage Wiener Filter, MSWF)提高了 DOA 估计的抗噪性能和分辨率,但该类算法依赖于参考信号的先验知识,而在实际中先验知识很难得到。文献[4-5]将生物进化算法与 DOA 估计问题结合起来,有效地克服了噪声的影响,但是生物进化算法计算量大,一方面很难满足实时要求,同时也难将这种算法向多维方面推广,应用范围有限。

本文通过分析样本协方差矩阵,采用三对角化分解等一些数学工具,能够降低估计方差,同时提高噪声子空间估计值的准确度,尤其在低信噪比的情况下性能更优越。

2 信号模型

信号模型如图 1 所示,阵列为 N 元直线阵,阵元间距为 d ,假设阵元均为各向同性阵元, P 个信号入射到阵列天线,入射角为 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, P)$,则阵列数据可表示为

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^P \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{j\beta_i}, \dots, e^{j(N-1)\beta_i}]^T$ 为确定性阵列响应向量, $\beta_i = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta_i)$, $s_i(t)$ 为信号的复幅度, $i = 1, 2, \dots, P$, $\mathbf{n}(t)$ 为高斯白噪声。

$$\mathbf{R}_X = E[\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{R}_S = E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)],$$

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_1(t), \dots, s_P(t)]^H,$$

\mathbf{A} 为阵列流型矩阵, σ^2 为噪声方差。

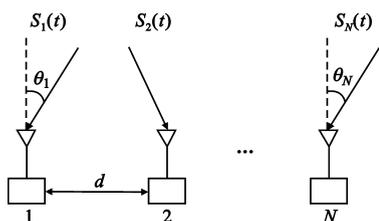


图 1 阵列模型
Fig.1 Array model

3 算法描述

3.1 对称三对角化过程

任何实方阵都可以通过初等旋转变换或者初等反射变换正交相似于上 Hessenberg 矩阵 \mathbf{A}_Δ ^[6],而阵列协方差矩阵 \mathbf{R}_X 为实对称矩阵时, \mathbf{R}_X 正交相似于三对角矩阵。

证明:设 T 为旋转变化的正交矩阵,由已知可得:

$$\mathbf{TR}_X\mathbf{T}^H = \mathbf{A}_\Delta \quad (3)$$

对式(3)两边取转置得:

$$\mathbf{TR}_X^H\mathbf{T}^H = \mathbf{TR}_X\mathbf{T}^H = \mathbf{A}_\Delta^H \quad (4)$$

则:

$$\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{A}_\Delta^H \quad (5)$$

所以 \mathbf{R}_X 只能正交相似于对称三对角矩阵。

现在设阵列协方差矩阵 $\mathbf{R}_X = (r_{ij})_{n \times n}$,取 \mathbf{R}_X 后 $n-1$ 个元素记为

$$\mathbf{r}_1^{(1)} = [r_{21}, r_{22}, \dots, r_{n1}]^H$$

第一步:对 $\mathbf{r}_1^{(1)}$ 进行旋转变换,变换矩阵为 $\mathbf{T}^{(1)}$,且 \mathbf{T}_i 形如 $[\times]_{(n-i) \times (n-i)}$ 。

$$\mathbf{T}_1\mathbf{r}_1^{(1)} = |\mathbf{r}_1^{(1)}| \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \in \mathbf{R}^{n-1} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_X \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^H \\ 0 & \mathbf{T}_1^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{21}^{(1)} & \dots & 0 & 0 \\ r_{21}^{(1)} & & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}^{(1)} & & \vdots \\ 0 & & & & r_{(n-1) \times n}^{(1)} \\ 0 & \dots & r_{n \times (n-1)}^{(1)} & & r_{n \times n}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

第二步:记 $\mathbf{R}^{(k)}$ 的各元素为 $r_{ij}^{(k)}$,取 $\mathbf{R}^{(1)}$ 第一列,后 $n-2$ 行得 $\mathbf{r}^{(2)} = [r_{32}^{(1)}, r_{42}^{(1)}, \dots, r_{n2}^{(1)}]^H$ 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \mathbf{R}^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^H \\ 0 & \mathbf{T}_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{(2)} & r_{21}^{(2)} & \dots & 0 & 0 \\ r_{21}^{(2)} & & & & \\ \vdots & & \mathbf{R}^{(2)} & & \vdots \\ 0 & & & & r_{(n-2) \times (n-1)}^{(2)} \\ 0 & \dots & r_{(n-1) \times (n-2)}^{(2)} & & r_{(n-1) \times (n-1)}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

当第 $n-3$ 步完成后 $\mathbf{R}^{(n-3)}$ 形如:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & r_{44}^{(n-3)} \end{bmatrix}$$

所以第 $n-2$ 步如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_{n-2} \end{bmatrix} R^{(n-3)} \begin{bmatrix} 1 & \theta^H \\ 0 & T_{n-2}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \quad (9)$$

此时达到了分解的目的,所以:

$$\begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T_{n-2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix} R_X \begin{bmatrix} 1 & \theta^H \\ 0 & T_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & \theta^H \\ 0 & T_2^H \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & \theta^H \\ 0 & T_{n-2}^H \end{bmatrix} = \Lambda_\Delta \quad (10)$$

同时,令

$$U = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T_{n-2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}$$

将分解得到的对称三对角矩阵表示为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 。

3.2 子空间估计

记 $A_1 = A$, 则 $A_1 = T_1 R_1$, 将 T_1 和 R_1 交换即 $A_2 = R_1 T_1$, 可得:

$$A_2 = T_1^T A_1 T_1 \quad (11)$$

设 $Q = T_{n-1} T_{n-2}, \dots, T_1$, 则:

$$\Lambda_\Delta = Q^T A_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ \vdots & 0 & \times & \times \\ 0 & \cdots & 0 & \times \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (12)$$

这里根据 Gerschgorin 圆定理^[7], 矩阵 A 的特征值包含在它所有的盖氏圆的并区间内。现在根据矩阵递推各个盖氏圆的半径。

记 $\Lambda_\Delta = (r_{ij})_{n \times n}$, 半径表示为 ρ , 盖氏圆的半径递推算法如下。

(1) 首先根据 Λ_Δ 得出第一个半径

$$\rho_1 = r_{12} \frac{r_{11}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}} + r_{22} \frac{r_{21}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}}$$

(2) for $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$r_{11}^{(i)} = \frac{r_{ii}}{\sqrt{r_{ii}^2 + r_{(i+1)i}^2}} r_{(i+1)(i+1)} - \frac{r_{i(i+1)}}{\sqrt{r_{ii}^2 + r_{(i+1)i}^2}} r_{i(i+1)}$$

$$\rho_i = r_{i(i+1)} = \frac{r_{11}^{(i)} + r_{(i+1)(i+1)} r_{(i+1)i}}{\sqrt{[r_{11}^{(i)}]^2 + r_{(i+1)i}^2}}$$

end

通过上述算法递推得到 $\rho_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ (第 n 个元素必定为噪声特征值), 则信号子空间列数的判定准则为

$$\rho_i - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i > 0 \quad (13)$$

将 ρ_i 代入上式, 满足条件的 i 的取值即为信源数 P 。

通过分解可得算法的基本步骤如下:

第一步: 对称三对角分解 $R_X = U^H \Lambda_\Delta U$;

第二步: 对角化分解 $\Lambda_\Delta = Q^H \Lambda Q$;

第三步: $V = QU$ 得:

$$[v_1, v_2, \dots, v_P] = [q_1, q_2, \dots, q_P] U$$

$$U_S = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_P\}$$

$$U_N U_N^H = I - U_S U_S^H$$

第四步: 由估计出的噪声子空间 U_N 可得到信号的空间谱为

$$W(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{a}^H(\theta) U_N|^2} = \frac{1}{|\mathbf{a}^H(\theta) U_N U_N^H \mathbf{a}(\theta)|^2}$$

其中, $\mathbf{a}(\theta)$ 为空间搜索角度的导向矢量。

4 仿真实验

在 Matlab 2010b 平台下编程, 从均方根误差、算法的稳健性和分辨率 3 个方面来证明本文算法的有效性, 分别比较文献[1]中的 MUSIC 算法、文献[2-3]中的 MSWF 算法, 以及文献[4-5]中的基于粒子群的算法, 下面将其表示为 PO(Particle Swarm Optimization) 算法。实验中阵列为 8 个阵元的均匀直线阵, 且阵元各向同性, 阵元间距为半波长。信号从 $\{-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\}$ 3 个方向入射, 噪声为时空高斯白噪声。

4.1 均方误差实验

图 2 为在不同信噪比的情况下 4 种算法估计的均方根误差比较, 快拍数为 256。从图中可以看出, 当信噪比高于 0 dB 时, 4 种算法的误差性能基本相同; 当信噪比低于 -5 dB 时, 本文算法的性能明显优于其余 3 种算法, 这说明本文算法降低了对噪声的敏感性, 当信噪比在 0 dB 到 15 dB 之间时, 本文算法

和 MSWF 算法的性能优于其余两种算法,这充分说明了本文算法的有效性。

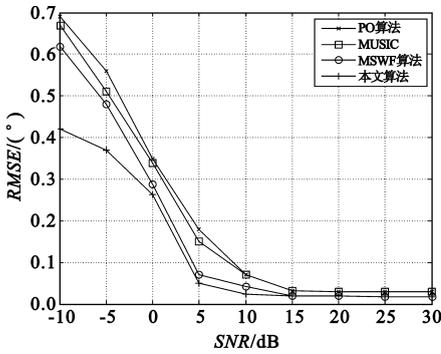


图 2 不同信噪比时均方根误差比较
Fig.2 Mean square error comparison in different SNR

4.2 快拍数影响实验

通过快拍数和谱峰搜索失败概率来衡量本文算法的数值稳健性。快拍数对均方根误差的影响反映的是算法在阵列协方差矩阵估计不准确的情况对估计结果的影响,谱峰搜索失败概率反映的是在噪声干扰的情况下算法对子空间估计的准确程度的依赖,从图 3 可以看出,在低信噪比时本文算法的性能最先开始好转,当信噪比上升至 0 dB 时,MSWF 算法的性能与本文算法相当,且优于其余两种算法。

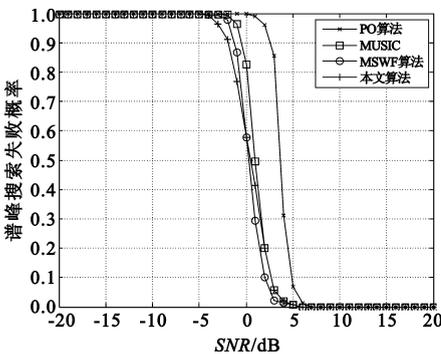


图 3 不同信噪比时失败概率比较
Fig.3 Failure probability comparison in different SNR

将信噪比变为 -5 dB,其余仿真条件不变,图 4 为快拍数对均方根误差的影响。仿真结果表明数据在 150 次快拍数以下时,本文算法表现出了很好的性能,优于 MSWF 算法;当高于 150 次快拍时两者性能相当,可以看出本文算法的稳健性远高于其他算法。

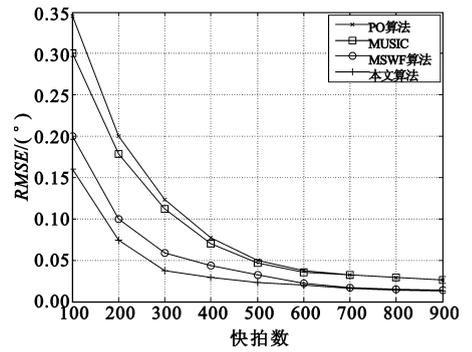


图 4 不同快拍数时的均方根误差比较
Fig.4 Mean square error comparison in different snaps

4.3 分辨率实验

将信号源设置成两个,入射角度为 $\{45^\circ, 50^\circ\}$,为了减少噪声对估计结果的影响,将信噪比调整为 15 dB。采样快拍数为 256,图 5 显示了各种算法对 5° 差异的两个信号的分辨能力。从图中可以看出,本文算法的谱峰最“尖锐”,能完全分辨两个信号,其余算法的性能都有下降,PO 算法已无法分辨两个信号。

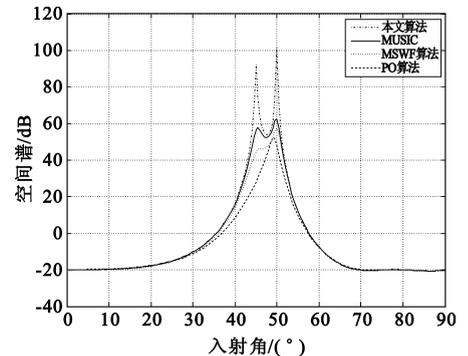


图 5 分辨率比较
Fig.5 Resolution comparison

5 结论

本文抓住了低信噪比时 DOA 估计性能差的关键,即大的噪声方差对子空间构成了很大的扰动,给估计值造成很大的方差,使从分解得到的特征值中无法正常估计噪声子空间,通过使用三角化分解和 Gerschgorin 圆理论递推出圆的半径,从而获得了较好的子空间估计结果,降低了特征值的方差。仿真表明,本文算法在误差性能、稳健性和分辨率方面取得了很好的效果,说明本文对 DOA 估计算法的改进是有效的。本文算法也还存在很多改进之处:

(1)DOA 估计的性能与所采用的阵型有很大的

关系,本文算法是在最基本的平面阵列的基础上进行的,对于其他的阵列性能如何,需要进一步分析和仿真;

(2)本文算法的计算量比 MUSIC 算法略大,在实时性要求高的系统中可能会满足不了要求。

总之,如何既要满足低方差、高稳健性、高分辨率而又要提高实时性是谱估计研究的屏障,作者将在这方面进行深入的研究。

参考文献:

- [1] Schmidt R O. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3):276 - 279.
- [2] Witzgall H E, Goldstein J S. Detection performance of the reduced - rank linear predictor ROCKET[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(7):1731 - 1738.
- [3] 于红旗, 刘剑, 黄知涛, 等. 基于多级维纳滤波的 MUSIC 方法[J]. 信号处理, 2007, 23(6):937 - 940.
YU Hong - qi, LIU Jian, HUANG Zhi - tao, et al. A music algorithm based on multi - stage wiener filter[J]. Signal Processing, 2007, 23(6):937 - 940. (in Chinese)
- [4] 刁鸣, 袁熹, 高洪元, 等. 一种新的基于粒子群算法的 DOA 估计[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(9):2046 - 2049.
DIAO Ming, YUAN Xi, GAO Hong - yuan, et al. New method of estimating direction - arrival of moving Sources based on particle swarm algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(9):2046 - 2049. (in Chinese)
- [5] Escot D, Poyatos D, Gonzalez I, et al. Application of particle swarm optimization(PSO) to single - snapshot direction of ar-

rival(DOA) estimation[C]//Proceedings of 2007 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. Madrid:IEEE, 2007:5287 - 5290.

- [6] Wan Feng, Zhu Weiping, Swamy M N S. Spacial Extrapolation - Based Blind DOA Estimation Approach for Closely Spaced Sources [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2010, 48 (2):569 - 582.
- [7] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京:清华大学出版社, 2002.
ZHANG Xian - Da. Modern signal processing[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. (in Chinese)

作者简介:

邱新建(1984—),男,陕西南郑人,2008年获学士学位,现为硕士研究生,主要研究方向为阵列信号处理;

QIU Xin - jian was born in Nanzheng, Shaanxi Province, in 1984. He received the B.S. degree in 2008. He is now a graduate student. His research direction is array signal processing.

Email:tonggong0412@163.com

山拜·达拉拜(1959—),男,新疆乌鲁木齐人,2000年获博士学位,现为教授,主要研究方向为智能信号处理与阵列信号处理;

SENBAI Dalabaev was born in Urumqi, Xinjiang Uyer Autonomous Region, in 1959. He received the Ph.D. degree in 2000. He is now a professor. His research interests include intelligent signal processing and array signal processing.

薛凤凤(1986—),女,陕西西安人,2008年获学士学位,现为讲师,主要研究方向为阵列信号处理。

XUE Feng - feng was born in Xi' an, Shaanxi Province, in 1986. She received the B.S. degree in 2008. She is now a lecturer. Her research direction is array signal processing.