

文章编号:1001-893X(2011)10-0055-05

基于到达角误差约束的稳健宽带波束合成算法^{*}

陈 云,黄 振

(清华大学 航天航空学院,北京 100084)

摘 要:针对阵列天线存在系统误差的情况,在 Frost 结构的基础上提出了一种改进的稳健宽带波束合成算法。该算法以信号到达角(DOA)误差为约束条件合成期望信号,并把滤波器优化设计转化为凸优化问题,使用内点迭代法有效解决,进一步使得期望的信号响应具有一定的波动性,从而使得更多的自由度应用在干扰和噪声的抑制上,达到优化加权制的目的。仿真结果表明,当系统存在一定的 DOA 误差、幅相误差和位置误差时,所提出的宽带波束合成算法获得的信干噪比(SINR)比 worst-case 约束算法提高约 1~3 dB。

关键词:阵列天线;稳健宽带波束合成;Frost 结构;DOA 误差约束

中图分类号:TN911.7 **文献标识码:**A doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2011.10.012

A Robust Broadband Beamforming Algorithm Under the Constraint of DOA Error

CHEN Yun , HUANG Zhen

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In view of the system errors of array antenna, a modified robust broadband algorithm is designed based on the Frost structure. The basic idea of the algorithm is that one desired signal is composed under the constraint of direction of arrival(DOA) error, and the optimization of the filters is transformed into a convex optimization problem, which can be effectively solved by interior point iterative methods. Then the response of desired signal is made to have some ripple, so more degree of freedom is used to suppress the noise and interference to optimize the coefficient of the filters. Simulation results show that the proposed broadband algorithm improves signal to interference noise ratio(SINR) 1~3 dB than the worst-case algorithm.

Key words: array antenna; robust broadband beamformer; Frost structure; constraint of DOA error

1 引 言

波束合成是一种空域滤波,它可以应用在雷达、声纳、无线通信等系统中,其主要作用是接收特定方向的信号,并且削弱其它方向的干扰。在文献[1,2]

中,稳健的复数加权算法能够实现窄带信号的波束合成。但是随着接收信号的带宽越来越大,天线阵接收的信号之间不满足相位差的关系,如果直接使用复数加权方法,信号可能会发生畸变。相对复数加权,Frost^[3,4]结构是针对宽带信号的波束合成器。在文献[3]中,假设期望信号方向为线性阵元的法线

^{*} 收稿日期:2011-04-29;修回日期:2011-07-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60972021);国家重点基础研究发展规划(973 计划)项目(2008BAH25B03);创新研究群体科学基金项目(61021001)
Foundation Item:The National Natural Science Foundation of China(No.60972021);The National Program on Key Basic Research Project (973 Program)(2008BAH25B03); The Funds for Creative Research Groups of China(No.61021001)

方向,这样的假设在实际当中往往不成立。后来,有作者提出了对 Frost 方法的修正方法^[5],其重要思想是增大波束主瓣宽度,从而减小宽带波束合成方法对于信号达到方向的敏感性。但是在实际系统中,往往存在 DOA 误差、阵元幅相不一致、互耦误差、位置误差等多种系统误差,从而导致阵列响应失配。在系统误差较大时文献^[5]的方法可能会失去作用。

在 Frost 结构的基础上,稳健的宽带波束合成算法是研究的热点^[6,7]。一种稳健的宽带波束合成算法是带有对角加载的 LCMV 算法^[6]。但是该算法存在加载量不确定,并且算法无法适应信号 SNR 较高的情形。另一种典型的稳健波束合成算法是 worst-case 约束算法^[7],这种算法可以提高波束合成的稳健性。但是,当期望信号 SNR 较高时,该算法对噪声的抑制不够大,导致高 SNR 时合成信号的信干噪比(SINR)相对 SNR 提高程度不够大。针对这种情况,本文提出了一种改进的稳健宽带波束合成算法,该算法的设计原理是增加 DOA 误差约束,使得期望信号在一定方向内的幅度响应大于 1,并且使信号响应具有一定的波动,从而使得更多的自由度^[8]来抑制干扰和噪声,达到提高波束合成 SINR 的目的。

2 Frost 波束合成器的结构和原理

在 M 个均匀线阵中,阵元接收信号向量为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{i}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{s}(t)$ 是期望的信号, $\mathbf{i}(t)$ 是干扰, $\mathbf{n}(t)$ 是噪声。假定信号与阵元法线方向夹角为 θ ,则阵元 m 相对于参考阵元的延迟为

$$\tau_m = (m - 1) d \sin \theta / c \quad (2)$$

在式(2)条件下,第 m 个阵元接收信号为

$$s_m(t) = s(t - \tau_m) e^{-j2\pi f_0 \tau_m} \approx s(t) e^{-j2\pi f_0 \tau_m} \quad (3)$$

假设信号频段在 Ku 频段,所以一般说来,信号载频 $f_0 \gg B$,故 $s(t - \tau_m) \approx s(t)$ 成立^[9]。在这种条件下,式(1)离散化,得到

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{s}(k) \mathbf{a} + \mathbf{i}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{a}$ 为阵列响应向量,其表达式为

$$\mathbf{a} = [1, e^{-j2\pi f_0 d \sin \theta / c}, \dots, e^{-j2\pi f_0 (m-1) d \sin \theta / c}]^T$$

当 $B > 0.1 f_0$ 时,此时信号为宽带信号,式(3)不成立,此时的复数加权方法如果直接应用于宽带波束合成,信号会产生畸变。对于宽带信号,一般采用

如图 1 所示的 Frost 结构来实现宽带波束合成^[3-5]。

Frost 结构由两部分组成:一部分是延时补偿,可以通过采样周期的整数倍补偿或者通过分数时延滤波器来实现,目的是为了叠加期望信号以最大程度地获得期望信号的能量;另一部分是分数时延后面的加权器,其作用是抑制噪声和干扰。

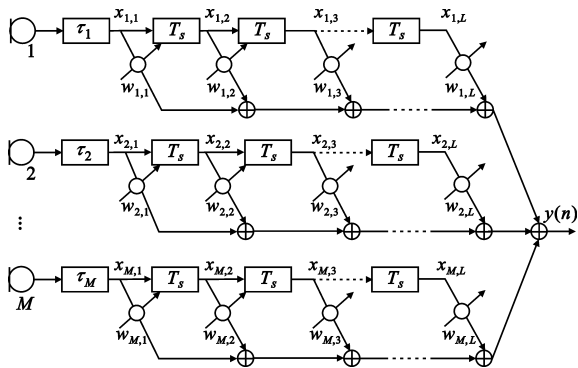


图 1 Frost 结构的波束合成器
Fig. 1 The beamformer with Frost structure

设计分数时延滤波器时,在第 m 个阵元,其时间延迟为 $\tau_m(\theta)$,为了保证补偿器延时为正,补偿器一般延时为

$$T_m = T_0 - \tau_m(\theta) \quad (5)$$

式中, $m = 1, 2, \dots, M$; $T_0 = M * d / c$ 。

设计延时补偿器,使其群时延满足式(5)就可以得到分数时延滤波器^[9,10]。在延时补偿器和加权器的共同作用下,Frost 结构的波束合成器的响应为

$$\mathbf{H}(\theta, f) = \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{D}(f) \mathbf{a}(f, \theta) \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(f) &\in \mathbb{C}^{L \times 1}, [\mathbf{d}(f)]_l = e^{-j2\pi f(l-1)T} \\ \mathbf{D}(f) &\in \mathbb{C}^{M \times M}, \mathbf{D}(f) = \text{diag}(e^{-j2\pi f T_m}) \\ \mathbf{a}(f, \theta) &\in \mathbb{C}^{M \times 1}, [\mathbf{a}(f, \theta)]_m = e^{j2\pi f \tau_m(\theta)} \\ \mathbf{W}^T &= [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \dots, \mathbf{w}_L^T] \\ [w_l]_m &= w((l-1)M + m) \end{aligned}$$

式中, $\otimes$ 表示克罗内克积; $m = 1, 2, \dots, M$; $l = 1, 2, \dots, L$ 。

3 增加 DOA 误差约束的稳健宽带波束合成

对于图 1 的波束合成器,为了使得信号全通需要期望方向信号幅度响应为 1^[3],这种算法便是 LCMV 算法:

$$\min \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}$$

$$\text{s.t.} \quad |H(f, \theta_0)| = 1 \tag{7}$$

在延时补偿精确的条件下,可以使得加权器系数某一系列和为 1。这样式(7)的频域表达式可以转化为时域表达式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{g} \end{aligned} \tag{8}$$

式中, $\mathbf{I}_L$ 是单位阵, $\mathbf{I}_M$ 是 M 个 1 组成的列向量; $\mathbf{C} = \mathbf{I}_L \otimes \mathbf{I}_M^T, \mathbf{g} = [1, \cdots, 0]^T$ 。解上式,可以得到最优解:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \tag{9}$$

由于系统误差的存在,需要稳健的波束合成算法。一种加强宽度波束合成鲁棒性的算法是对角加载^[6]。带有对角加载的 LCMV 算法的优化函数为

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T (\mathbf{R}_{xx} + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{g} \end{aligned} \tag{10}$$

解上式,可以得到最优解:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = (\mathbf{R}_{xx} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T (\mathbf{R}_{xx} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g} \tag{11}$$

这样在惩罚因子 γ 的作用下,波束合成器对于白噪声的抑制能力加强,对于干扰的抑制能力减弱,这样当系统误差存在时,对于期望信号的抑制就会减弱,从而增强宽带波束合成的稳健性。对角加载虽然可以使得宽带波束合成的稳健性增强,但却存在加载量不确定的问题。

在实际中由于测向获得的 DOA 有一定的误差,同时,当接收的信号是运动目标时,波束合成需要对 DOA 误差有一定的稳健性^[8,11]。基于这个原理,本文设计了 DOA 约束下的宽带波束合成算法。

信号的 DOA 为 θ , 此时 $\Delta\theta$ 为到达角的变化范围。对于阵列响应矢量,由泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(f, \theta + \Delta\theta) &= \mathbf{a}(f, \theta) + \mathbf{a}'(f, \theta) \Delta\theta = \\ \mathbf{a}(f, \theta) + \Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{a}(f, \theta) \cdot \mathbf{m} = \\ \mathbf{a}(f, \theta) \cdot [\mathbf{I}_M + \Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{m}] \end{aligned} \tag{12}$$

其中, $\mathbf{m} = [0, 1, \cdots, M-1]^T$ 。代入式(6),可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(f) \mathbf{a}(f, \theta + \Delta\theta) &= \\ e^{-j2\pi f T_0} (\mathbf{I}_M + \Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{m}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\theta + \Delta\theta, f) &= \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{D}(f) \mathbf{a}(f, \theta + \Delta\theta) = \\ e^{-j2\pi f T_0} \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes (\mathbf{I}_M + \Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{m}) \end{aligned} \tag{14}$$

使期望的信号获最大程度通过,则有:

$$|\mathbf{H}(\theta + \Delta\theta, f)| \geq 1 \tag{15}$$

结合式(14)和式(15):

$$|\mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{I}_M + \Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| \geq 1 \tag{16}$$

利用三角不等式得到:

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{I}_M + \Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| &\geq \\ |\mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{I}_M| - |\Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| & \end{aligned} \tag{17}$$

为了使式(17)恒成立,只需要

$$|\mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{I}_M| - |\Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| \geq 1 \tag{18}$$

进一步,可以把式(18)转化为

$$\begin{aligned} |\Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| &\leq v \\ |\mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{I}_M| - v &\geq 1 \end{aligned} \tag{19}$$

同样,为了抑制干扰和白噪声,要使波束合成后的方差最小。这样稳健的自适应波束合成问题可以转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & |\Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| \leq v \\ & |\mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{I}_M| - v \geq 1 \end{aligned} \tag{20}$$

对于式(20),第二个约束不是凸约束,为了使其转化为凸问题,可以使加权器系数对称^[7],从而使式(20)变为

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}_{m, L_{\text{mid}} - l} = \mathbf{w}_{m, L_{\text{mid}} + l} \\ & |\Delta\theta \frac{d}{dc} \cos\theta (-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| \leq v \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{CBg}(f) - v \geq 1 \end{aligned} \tag{21}$$

其中, $L_{\text{mid}} = (L+1)/2, \mathbf{B} \in R^{L \times L_{\text{mid}}}, \mathbf{g}(f) \in R^{L_{\text{mid}} \times 1}$ 且两者满足式(22)。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(f) = [1, \cos(2\pi fTs), \cdots, \cos(2\pi f(L_{\text{mid}} - 1)Ts)]^T \tag{22}$$

这样,式(21)的第二个约束变为凸约束,式(21)完全转化为一个凸问题,可以通过典型的内点迭代算法实现。

在信号到达方向内,可使期望信号的响应具有一定的波动性,从而可以把更多的自由度^[8]用在对干扰和噪声的抑制上,这时需要:

$$\begin{aligned} \max(\text{abs}(H(\theta, f))) - \min(\text{abs}(H(\theta, f))) &\geq \epsilon \\ \forall \theta \in [\theta - \Delta\theta, \theta + \Delta\theta] \end{aligned} \tag{23}$$

针对 worst - case 约束算法在高 SNR 时合成 SINR 提高相对较低的现象,为了加大对于噪声的抑制,可以在式(21)的基础上加惩罚因子 $\beta \mathbf{w}^T \mathbf{w}$, 这样其变为

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \beta \mathbf{w}^T \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & w_{m, L_{\text{mid}} - l} = w_{m, L_{\text{mid}} + l} \\ & |\Delta\theta \frac{d}{c} \cos\theta(-j2\pi f) \mathbf{w}^T \mathbf{d}(f) \otimes \mathbf{m}| \leq v \\ & \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{g}(f) - v \geq 1 \end{aligned} \tag{24}$$

综合以上思路,得到如下新算法:计算协方差矩阵 $\mathbf{R}_{xx}$, 给 α 和 β 赋初值,然后按照如下步骤执行算法:

- (1)更新协方差矩阵 $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{xx} + \beta \mathbf{I}$;
- (2)根据式(21)计算 $\mathbf{w}$;
- (3)计算式(23)是否成立,若成立,算法结束;若不成立, $\beta = \alpha\beta$, 跳到步骤 1。

4 仿真及分析

仿真环境如下:在 Ku 频段,阵元 $M = 10$ 的等距线,加权器阶数 $L = 9$,载频 $f_0 = 12$ GHz,阵元距离 $d = 0.5\lambda_0$,带宽 $B = 2$ GHz。信干比 $SIR = -20$ dB。进行 100 次蒙特卡洛仿真。取 $\alpha = \beta = 4$ 。其中,4 种算法分别是线性约束算法(LCMV)^[3-5]、带有对角加载的线性约束算法^[3,6](加载量 $\gamma = 11.8$ dB)、worst - case 约束算法^[7]和本文算法。

图 2 是在 $SIR = -20$ dB 时,DOA 存在 4° 误差条件下,4 种算法合成性能随 SNR 的变化曲线。从图 2 可以看出 LCMV 算法稳健性最差,这是由于期望信号实际的 DOA 与理想 DOA 存在误差,此时 LCMV 的波束合成把期望信号当作干扰进行了抑制,从而导致算法合成的 SINR 降低,且随着信号能量越强,合成的信号的 SINR 反而更低。带有对角加载的

LCMV 算法在低 SNR 稳健性较好,但是由于加载量过低,导致该算法在 SNR 较高时,稳健性较差;相反,如果加载量过大,合成信号的 SINR 在低 SNR 时会比较差。由于考虑了系统误差的影响,worst - case 约束算法和本文算法在整个 SNR 内,稳健性相对较好。相比之下,本文算法的合成 SINR 相对于 worst - case 提高 1 ~ 3 dB。

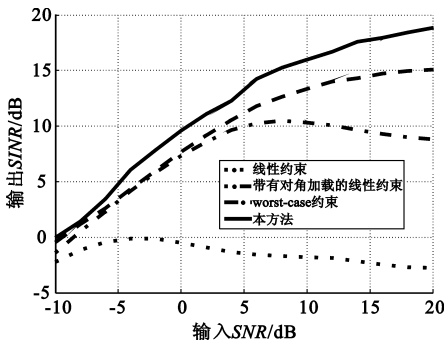


图 2 DOA 误差下输出 SINR 随 SNR 变化曲线图
Fig.2 The SINR versus SNR with DOA error

图 3 是相位误差为 $\pm 20^\circ$ 、幅度误差为 ± 2 dB 时 4 种算法下 SINR 随 SNR 变化的曲线。从图 3 可以看出,在 $SIR = -20$ dB 时,幅度误差和相位误差分别为 ± 2 dB 和 $\pm 20^\circ$ 以下,worst - case 约束和本文算法在整个 SNR 内稳健性相对较好。相比 worst - case 约束算法,本文算法的合成 SINR 提高约 1 ~ 2 dB。

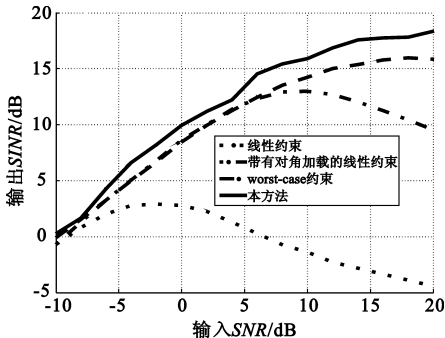


图 3 幅相误差下输出 SINR 随 SNR 变化曲线图
Fig.3 The SINR versus SNR with amplitude and phase uncertainties

图 4 是阵元相对位置误差为 10% 时,4 种算法下 SINR 随 SNR 变化的曲线。从图 4 可以看出,在 $SIR = -20$ dB 条件下,阵元相对位置误差为 10% 时,worst - case 和本算法在整个 SNR 内稳健性好。相比 worst - case 约束算法,本文算法的合成 SINR 提高约 1 ~ 2 dB。

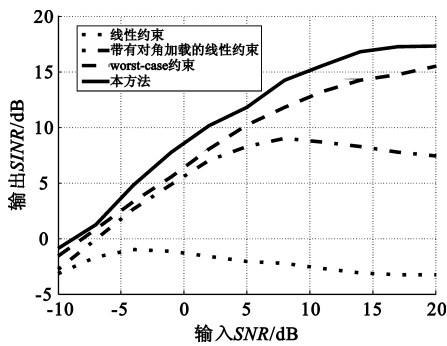


图 4 相对位置误差下输出 SINR 随 SNR 变化曲线图
Fig.4 The SINR versus SNR with relative position error

综合来看,本文提出的算法在存在 DOA 误差、幅相误差、位置误差时,其性能优于 LCMV、对角加载的 LCMV 和 worst - case 约束。

5 结 论

本文提出了一种改进的稳健宽带波束合成算法。为了提高波束合成的稳健性,算法增加 DOA 误差约束合成期望信号,并使得信号响应有一定的波动,从而使得更多的自由度应用在对噪声和干扰的抑制。仿真验证了在系统误差下,本算法波束合成的 SINR 相对于 LCMV、对角加载的 LCMV 和 worst - case 算法的合成的 SINR 有一定程度的提高,从而使得算法在天线阵的宽带波束合成上具有一定的实用性。

参考文献:

- [1] Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst - case performance optimization: A solution to the signal mismatch problem[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2): 313 - 324.
- [2] Li J, Stoica P, Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(7): 1702 - 1715.
- [3] Forst O L III. An algorithm for linearly constrained adaptive processing[J]. Proceedings of the IEEE, 1972, 60(8): 926 - 935.
- [4] Barry D Veen, Kevin M Buckley. Beamforming: A Versatile:

- Approach to Spatial Filtering [J]. IEEE ASSP Magazine, 1988, 5(2): 4 - 24.
- [5] Er M H, Cantoni A. Derivative constraints for broad - band element space antenna array processors [J]. IEEE Transactions on Acoustic Speech Signal Processing, 1983, 31(6): 1378 - 1393.
- [6] Cox H, Zeskind RM, Owen M H. Robust adaptive beamforming [J]. IEEE Transactions on Acoustic Speech Signal Processing, 1987, 35(10): 1365 - 1376.
- [7] Amr El - Keyi, Thia Kirubarajan, Gershman A B. Wideband robust beamforming based on worst - case performance optimization[C]// Proceedings of 2005 IEEE/SP 13th Workshop on Statistical Signal Processing. Bordeaux: IEEE, 2005: 265 - 270.
- [8] Zhu Liang Yu, Meng Hwa Er, Wee Ser. A Novel Adaptive Beamformer Based on Semidefinite Programming (SDP) With Magnitude Response Constraints [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(5): 1297 - 1307.
- [9] WEI Wen, LI Ning, TANG Jun, PENG Yingning. Broadband Digital Beamforming Based on Fractional Delay in SAR Systems [C]// Proceedings of the 2nd Asian - Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar. Xi'an: IEEE, 2009: 575 - 578.
- [10] Chien - Cheng Tseng. Design of Variable Fractional Delay for Filter Using Symmetry [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 13(7): 477 - 480.
- [11] Chun - Yang Chen, Vaidyanathan P P. Quadratically Constrained Beamforming Robust Against Direction - of - Arrival Mismatch [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(8): 4139 - 4150.

作者简介:

陈 云(1984—),男,甘肃兰州人,2008 年于清华大学获工学学士学位,现为清华大学航天航空学院硕士研究生,主要研究方向为信号处理;

CHEN Yun was born in Lanzhou, Gansu Province, in 1984. He received the B.S. degree from Tsinghua University in 2008. He is now a graduate student. His research direction is signal processing.

Email: confucianer@gmail.com

黄 振(1969—),男,重庆人,副研究员,主要研究方向为信号处理。

HUANG Zhen was born in Chongqing, in 1969. He is now an associate research fellow. His research direction is signal processing.