

文章编号:1001-893X(2011)09-0131-05

Turbo 码的 Taylor – Log₋MAP 译码算法^{*}

李思佳,毛玉泉,郑秋荣,张建安,李 波

(空军工程大学 电讯工程学院,西安 710077)

摘 要:以 Turbo 码基本理论和算法为基础,依据无线信息传输的实际要求和 Taylor 级数的基本原理,提出了一种 Turbo 码的 Taylor – Log₋MAP 高效译码算法。该算法对基本的 Log₋MAP 算法中 K 运算利用 Taylor 级数进行展开,针对实际的信道需求对展开式进行截断,实现了 Turbo 码的最佳译码。与传统的对数域最大后验概率译码算法相比,该算法基本保持了优良的译码性能,同时避免了复杂的对数运算,减小了运算量。仿真结果表明,与现有的 RS 码性能相比,使用 Turbo 码可以获取 5 dB 的信噪比增益。

关键词:战术数据链; Turbo 码; Taylor 定理; 最大后验概率译码; 误码率

中图分类号:TN911.22 **文献标识码:**A doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2011.09.027

A Taylor – Log₋MAP Decoding Algorithm for Turbo Codes

LI Si-jia, MAO Yu-quan, ZHENG Qiu-rong, ZHANG Jian-an, LI Bo

(Telecommunications Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract:Based on the theory and architecture of Turbo codes, an efficient new decoding algorithm is designed according to the requirement of communication and the Taylor series. The function is transformed through the Taylor series expansion and truncated according to the demand for wireless communication. Compared with the Log₋MAP decoding algorithm, the new algorithm avoids complex operation. Simulation result shows the proposed algorithm keeps excellent decoding performance and the Taylor – Log₋MAP decoding algorithm can bring 5dB SNR(Signal – to – Noise Ratio) gain compared with the RS codes.

Key words:tactical digital information link; Turbo codes; Taylor theorem; MAP decoding; bit error rate

1 引 言

采用高性能的信道编码方式是增强战术数据链(Tactical Digital Information Link, TADIL)战时信息传

输可靠性的有效手段。现有 TADIL 系统使用的信道编码为 RS 码,最为典型的战术数据链 Link – 16 使用了 RS(16, 7)和 RS(31, 15)码,两者分别能纠 4 和 8 个错误,相同条件下 RS 码的误码率比 Turbo 码大许多^[1]。因此,使用 Turbo 码来提高 TADIL 信息

^{*} 收稿日期:2011-04-11;修回日期:2011-05-30

基金项目:国家高技术研究发展计划(863 计划)项目(2010AAJ145);国家自然科学基金资助项目(60802053);陕西省电子信息系统综合集成重点实验室基金项目(201102Y05);空军工程大学电讯工程学院科研创新项目(DY-CX1040, DYCX1007);空军工程大学研究生创新基金项目(20110301)

Foundation Item:The National High – tech R&D Program of China (863 Program) (2010AAJ145);The National Natural Science Foundation of China (No.60972042); Research Fund of Shannxi Key Laboratory of Electronic System Integration (No.201102Y05);Science Innovation and Research Fund of Telecommunication Engineering Institute of Air Force Engineering University (DYCX1040, DYCX1007);The Graduate Innovation Foundation of Air Force Engineering University under Grant(No.20110301)

传输可靠性成为了下一代 TADIL 的一种有效手段。

Turbo 码的实现难点是译码算法的简化。经典的 Turbo 译码算法可以分为三大类——标准 MAP 译码算法^[2]、Log_MAP 译码算法^[3]和改进型 Viterbi 译码算法^[4],这 3 种方法都实现了 Turbo 码的有效译码,其共同特点是译码算法较复杂,电路实现难度较大;但由于 Log_MAP 算法的数值动态范围小且易于实现而被广泛研究。Max_Log_MAP 算法^[5]是 Log_MAP 的简化译码算法,这一算法大大简化了 Turbo 码的译码过程,但带来至少 0.3 dB 的信噪比损失。为了减小损失,大量文献对 Max_Log_MAP 算法进行改进^[6,7]。文献[8]通过增加线性参数分量,减小了 Max_Log_MAP 信噪比的损失,但线性参量的估计过程非常复杂;文献[9]从理论和硬件实现两个方面考虑,有机结合了运算的并行处理,实现了译码算法的简化,但未能避免信噪比的损失。考虑到 TADIL 关注的核心是传输可靠性问题,本文基于 Log_MAP 译码方式,对其译码过程中的 K 运算利用 Taylor 定理进行展开,进一步结合实际通信要求,对展开式进行截断,完成了 Turbo 码的译码。这种 Turbo 译码算法保持了 Log_MAP 译码算法的良好性能,又简化了 Log_MAP 算法的运算复杂度,因而属于最优译码范畴。仿真结果表明 Turbo 码可以获得 5 dB 信噪比增益。

2 基于 Taylor 定理的 MAP 译码算法

2.1 标准 MAP 迭代译码算法

标准 Turbo 码的译码器由两个相同的 1/2 码率卷积译码器组成。如图 1 所示, S 表示接收的信息位; P₁、P₂表示接收第一、二路的校验位; SISO (Soft in – soft – out)表示软入、软出的 MAP 解码器,输出 S 的外信息和硬件判决。Turbo 译码方法是串行迭代的过程,综合文献[10],下面总结了 Turbo 译码迭代算法的简要过程。

步骤 1:第一次迭代,第一个 SISO 的 MAP 解码器以 S 和 P₁为输入,产生外信息 E₁;

步骤 2:第二个 MAP 解码器以 P₂和外信息 E₁为输入,产生外信息 E₂;

步骤 3:第二次迭代,第一个解码器以 S'、P₁和 E₂为输入,产生外信息 E' ₁;

步骤 4:第二个解码器以 P₂和外信息 E' ₁为输入,产生外信息 E' ₂。

每一码元依照步骤 1 ~ 4,完成 Turbo 译码算法

的迭代过程。

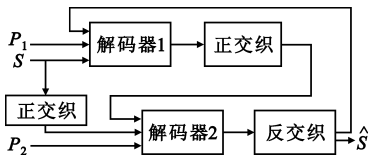


图 1 Turbo 解码器
Fig.1 The turbo decoder

在 BPSK 调制、高斯信道和相干解调条件下,接收码字和编码码字之间的关系如公式(1)所示:

$$\begin{cases} y_k^s = a_k u_k + n_k^s \\ y_k^p = a_k x_k^p + n_k^p \end{cases} \tag{1}$$

$$\alpha_k(s) = P(S_k = s, Y_k) \tag{2}$$

$$\beta_k(s) = P(Y_{k+1}^N / S_k = s) \tag{3}$$

$$\gamma_k(s', s) = P(Y_k, \frac{S_k = s}{S_{k-1} = s'}) \tag{4}$$

$$L(u_k) = \ln \frac{P(u_k = 1)}{P(u_k = -1)} \tag{5}$$

$$L(\frac{u_k}{Y_k}) = \ln \frac{P(u_k = 1, Y_k)}{P(u_k = -1, Y_k)} \tag{6}$$

式中, a_k 表示 k 时刻的衰落乘性系数, n_k^s 和 n_k^p 分别表示 k 时刻信息比特和校验比特的加性高斯白噪声(AWGN),均值为零,方差为 δ²;码字符号如表 1 所示。当 y_i 表示 i 时刻接收的码字,则从时刻 n 到 m 接收的码字序列为 Y_n^m = (y_n, y_{n+1}, ..., y_m); α_k(s) 表示 k 时间段内接收码字序列 Y_k 的前向递推概率, β_k(s) 为接收码字序列 Y_{k+1}^N 的后项递推概率; s 表示编码器的状态, γ_k(s', s) 表示 k - 1 时刻的 s' 状态条件下到 k 时刻 s 状态,且接收码字为 Y_k 的状态转移概率。L(u_k) 为似然比, L(u_k/Y_k) 为后验概率的输出似然比, L_B = $\frac{2a_k}{\delta^2}$ 为信道补偿参数。

表 1 码字符号
Table 1 Symbol of codes

时刻 K	编码码字	接收码字
码字表示	B _k = (u _k , x _k ^p)	Y _k = (y _k ^s , y _k ^p)
信息比特	u _k	y _k ^s
校验比特	x _k ^p	y _k ^p

结合度量概率 M_k['] = ln P(Y_k, s', s), M_k^{''} = ln P(Y_k, s'', s), 式(2) ~ (4) 可变换为式(7) ~ (8), 最大后验概率由式(10)确定。α、β 的初始状态如表 2 给出, 软判决输出由公式(11)确定; u_k 是硬判决的双极性比特, u_k = sign[L_k(u_k/Y_N)], sign 表示符号

函数。

$$\alpha_k(s) = \sum_{s'} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k(s', s) \tag{7}$$

$$\beta_{k-1}(s') = \sum_s \beta_k(s) \gamma_k(s', s) \tag{8}$$

$$\gamma_k(s', s) = P(u_k) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left[-\frac{(\gamma_k^s - a_k u_k)^2}{2\delta^2}\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \exp\left[-\frac{(\gamma_k^p - a_k u_k^p)^2}{2\delta^2}\right] \tag{9}$$

$$L\left(\frac{u_k}{Y_N}\right) = \ln \frac{\sum_{\substack{s',s \\ u_k=1}} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k(s', s) \beta_k(s)}{\sum_{\substack{s',s \\ u_k=-1}} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k(s', s) \beta_k(s)} \tag{10}$$

$$L_k(u_k)_{\text{out}} = L_k(u_k/Y_N) - L_{BY_k^s} - L_k(u_k)_{\text{in}} \tag{11}$$

表 2 α, β 初始状态

Table 2 Initialized state of α and β

状态 s	符号	$s = 0$	$s \neq 0$
卷积码初态为零	$\alpha_0(s)$	1	0
卷积码归零	$\beta_N(0)$	1	0
卷积码不归零	$\beta_N(s)$	$1/N, N$ 为状态数	

2.2 基于 Taylor 定理的 MAP 译码算法

简化 MAP 译码算法的具体实施步骤如下。
Step 1: 引入对数映射 $h: y = \ln x$, 式(7) ~ (9)可化简为式(12) ~ (14), 若遇加法运算时, 则进行 Step 2;

$$\alpha_{1,k}(s) = \max_{s'} f_{\alpha,\gamma}(s') + f_{\alpha,\gamma}(s') - \frac{1}{2} f_{\alpha,\gamma}^2(s') + \frac{1}{3} f_{\alpha,\gamma}^3(s')^3 \tag{12}$$

$$\beta_{1,k-1}(s') = \max_{s'} f_{\beta,\gamma}(s') + f_{\beta,\gamma}(s') - \frac{1}{2} f_{\beta,\gamma}^2(s')^2 + \frac{1}{3} f_{\beta,\gamma}^2(s')^3 \tag{13}$$

$$\gamma_{1,k}(s', s) = u_k \frac{L(u_k)}{2} + \frac{L_c}{2} (u_k \gamma_k^s + x_k^p \gamma_k^p) \tag{14}$$

Step 2: K 运算的定义

$$a \text{ K } b = \ln(e^a + e^b) = \max(a, b) + \ln(1 + e^{-|a-b|}) \tag{15}$$

Step 3: 由文献[11]可知 $|a-b| \gg 0$, 因此利用 Taylor 定理有式(16)。为了在保证一定精度的条件下尽可能化简运算, 对式(16)进行截断, 取展开式的前三项, 得到式(17)。

$$a \text{ K } b = \max(a, b) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} (e^{-|a-b|})^i + \frac{(e^{-|a-b|})^{n+1}}{(n+1)[1 + \theta \cdot (e^{-|a-b|})]^{n+1}} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a \text{ K } b = \max(a, b) + f - \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{3} f^3 \\ f = e^{-|a-b|} \end{cases} \tag{17}$$

Step 4: 结合 Step 1 ~ 3 和式(15)、(17)化简式(10)、(11)得到式(18):

$$L_1\left(\frac{u_k}{Y_N}\right) = \max_{\substack{s',s \\ u_k=1}} \left[f_{\alpha,\beta,\gamma}(s') + \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \frac{1}{i} (f_{\alpha,\beta,\gamma}(s'))^i \right] - \max_{\substack{s',s \\ u_k=-1}} \left[f_{\alpha,\beta,\gamma}(s') + \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} \frac{1}{i} (f_{\alpha,\beta,\gamma}(s'))^i \right] \tag{18}$$

其中, $f_{\alpha,\gamma}(s') = \alpha_{k-1}(s') + \gamma_k(s', s)$, $f_{\beta,\gamma}(s') = \beta_k(s) + \gamma_k(s', s)$, $f_{\alpha,\beta,\gamma}(s') = \alpha_{k-1}(s') + \gamma_k(s', s) + \beta_k(s)$ 。

Step 5: 软判决输出

$$L_k(u_k) = L_1\left(\frac{u_k}{Y_N}\right) - L_{BY_k^s} - L_{1,k}(u_k)_{\text{in}} \tag{19}$$

每一码元依照 Step 1 ~ 5, 完成 Turbo 译码算法的迭代过程。对于 Step 3 做一简要分析: 由于满足 $|a-b| \gg 0$ 条件, 因此可以利用 Taylor 定理的应用公式(式(20)、式(21)), 结合式(15)得到公式(16), $R_n(e^{-|a-b|})$ 为拉格朗日余项。

$$\ln(1 + e^{-|a-b|}) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} (e^{-|a-b|})^i + \frac{R_n(e^{-|a-b|})}{R_n(e^{-|a-b|})} \tag{20}$$

$$R_n(e^{-|a-b|}) = \frac{1}{(n+1)(1 + \theta \cdot e^{-|a-b|})^{n+1}} \cdot (e^{-|a-b|})^{n+1} \tag{21}$$

3 Turbo 译码算法的仿真与对比

3.1 Taylor 定理展开项的确定

首先比较了不同截断长度 $a \text{ K } b$ 的有效性, 完成了 Step 3 截断的仿真验证, 保证了式(16)中展开项取 $n = 3$ 的可靠性。

仿真环境为 $a = 5, b \in [5, 7]$, 完成了 n 分别取 2, 3, 4 和 5 时 $a \text{ K } b$ 理论曲线与仿真曲线。如图 2 所示, 当 $|a-b| > 1$ 时, 仿真曲线和理论曲线基本一致; 当 $0 \leq |a-b| < 1$ 时, 仿真误差较大。进一步完成了不同截断长度条件下误差曲线的分析。如图 3 所示, 可以看出截断长度直接影响到算法的精度。表 3 从统计角度分析了误差性能, 统计数据反映了即使是最大误差比率也在 10^{-2} 数量级, 从而保证了本文的 Taylor – Log₋ MAP 译码算法的可靠性。为了简化运算量, 最终算法采用 $n = 3$ 的截断长度。

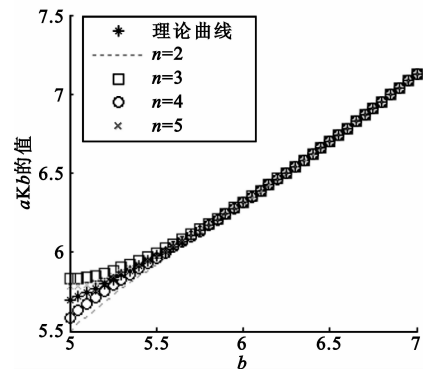


图2 仿真曲线与理论曲线的比较图
Fig.2 Simulated and theoretical curve

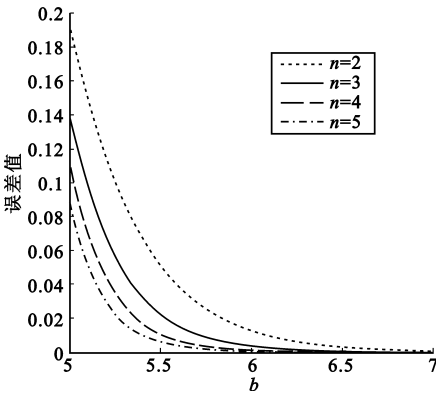


图3 aKb 的误差曲线
Fig.3 Error curve of simulated and theoretical value

表3 aKb 仿真检验表
Table 3 Check list of the aKb simulation

$a=5$ $b \in [5,7]$	理论 值	n 的取值			
		2	3	4	5
aKb 的 均值	6.347 0	6.309 7	6.367 9	6.334 3	6.356 4
均值 误差值	0	0.037 6	0.020 6	0.013 0	0.009 1
均值误 差比率	0	5.8×10^{-3}	3.2×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.4×10^{-3}
初始值	5.693 1	5.5	5.833 3	5.583 3	5.783 3
最大 误差值	0	0.193 1	0.139 9	0.109 8	0.090 2
最大误 差比率	0	3.39×10^{-2}	2.46×10^{-2}	1.9×10^{-2}	1.58×10^{-2}

表4 运算量的对比
Table 4 Contrast of computation

译码算法	加(减)	乘(除)	对数指数	求绝对值	求最大值	取整
标准 MAP	$15nN$	$(22n+1)N$	$(6n+1)N$	0	0	0
Log ₋ MAP	$(12n+3)N$	$(4n-2)N$	0	$(4n-2)N$	$(4n-2)N$	$(4n-2)N$
Max ₋ Log ₋ MAP	$(8n+8)N$	0	0	0	$(4n-2)N$	0
本文算法	$(9n+5)N$	$(6n-2)N$	0	$(4n-2)N$	$(4n-2)N$	0

3.2 译码算法分析与比较

译码算法的仿真环境如下:调制方式为 BPSK,生成多项式为[7,3],码速率为 1 kbit/s,载波频率为 400 MHz,帧长 512,RSC 编码器状态数为 8,信道为 AWGN,迭代次数为 4,码率为1/2,交织长度为 378。在该环境下完成了采用 $n=3$ 阶的 Turbo 码的 Taylor-Log₋ MAP 译码算法的仿真,仿真结果如图 4 所示。由图可见,本文提出算法的译码性能与 Log₋ MAP 算法性能相当。由于 TADIL 的信道编码要求: SNR = 12 dB 时,误码率 $P_e \leq 10^{-5}$;因此从图 4 可知,在误码率 $P_e = 10^{-5}$ 条件下本文提出的译码算法信噪比增益和 Log₋ MAP 算法的增益基本一致,比现阶段 RS 码可以多获得 5 dB 的信噪比增益,因此 TADIL 的信道编码方式使用 Turbo 是一个较好的选择。

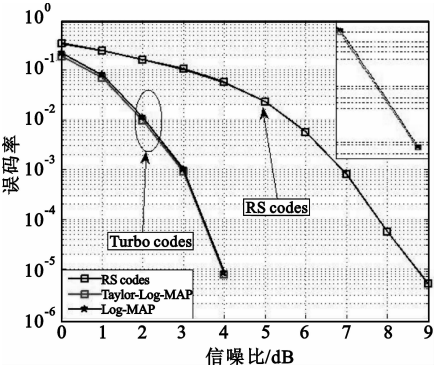


图4 译码算法仿真曲线
Fig.4 Simulated curve of decoding algorithm

3.3 译码算法复杂度的分析

本节比较标准 MAP 译码算法、Log₋ MAP 算法、Max₋ Log₋ MAP 算法^[12,13]和本文译码算法的复杂度。如表 4 所示,本文的 Taylor-Log₋ MAP 译码算法比标准 MAP 算法和 Log₋ MAP 算法简单,比 Max₋ Log₋ MAP 复杂一些,但消除了 Max₋ Log₋ MAP 的 0.3 dB 的信噪比增益,在保证译码性能的同时,达到了简化算法的目的;现阶段,TADIL 使用的 RS 码译码比较简单,只需加类和乘类的计算,但译码性能无法与 Turbo 码相比较。

综上所述,采用三阶的基于 Taylor 中值定理的 Log-MAP 译码算法完成 Turbo 译码,不仅保证了算法的有效性,更具有很高的可靠性;在 TADIL 要求条件下,Turbo 码与 RS 码相比可以获得至少5 dB的信噪比增益,从而增强了 TADIL 的无线通信能力。

4 结论与展望

本文通过 Taylor 级数的展开与截断简化了 Log-MAP 译码算法,仿真验证了该 Turbo 译码算法的有效性和可靠性,本文的译码算法与 Log-MAP 译码算法相比较最大误码率误差小于 10^{-3} 数量级。对于 Taylor 级数展开项的大小,通过仿真确定了使用三阶展开项完成译码较为合适。低误码率的 Turbo 码为 TADIL 的应用奠定了基础,增强了 TADIL 信息传输的可靠性,下一步的工作将是完成该方法的硬件实现。

参考文献:

- [1] Djordjevic I B, Vasic B. MacNeish - Mann theorem based iteratively decodable codes for optical communication systems[J]. IEEE Communications Letters, 2004, 24(9): 538 - 540.
- [2] Berrou C, Glavieux A, Thitimajshima P. Near Shannon limit error - correcting coding and decoding: Turbo - codes[C]//Proceeding of 1993 IEEE International Conference on Communications. Geneva, Switzerland: IEEE, 1993: 1064 - 1070.
- [3] Valenti M C. An efficient software radio implementation of the UMTS turbo code[C]//Proceeding of 2011 IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communication. Morgantown, USA: IEEE, 2011: 108 - 113.
- [4] Offer H E, Papke L. Iterative decoding of binary block and convolution codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42(21): 429 - 445.
- [5] Park S - J. Combined Max - Log - MAP and Log - MAP of turbo codes[J]. IEEE Electronics Letters, 2004, 29(19): 251 - 253.
- [6] Mong Suan Yee. Max - Log - MAP Sphere Decoder [C]//Proceeding of 2005 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Philadelphia, USA: IEEE, 2005: 1013 - 1016.
- [7] Salmela P, Jarvinen T, Takala J. Simplified max - log - MAP decoder structure[J]. IEEE Mobile Future, 2006, 31(10): 10 - 13.
- [8] Han J H, Erdogan A T, Arslan T. High Speed Max - Log - MAP Turbo SISO Decoder Implementation Using Branch Metric Normalization [C]//Proceedings of 2005 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI. Tampa, Florida, USA: IEEE, 2005: 173 - 178.
- [9] Pankaj Golani, Georgios D Dimou, Mallika Prakash, et al. Design of a High - Speed Asynchronous Turbo Decoder [C]//Proceedings of the 13th IEEE International Symposium on Asynchronous Circuits and Systems. Berkeley, California: IEEE, 2007: 49 - 59.
- [10] Louay Bazzi, Mohammad Mahdian, Daniel A. Spielman. The Minimum Distance of Turbo - Like Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(1): 6 - 15.
- [11] Park S J. Combined Max - Log - MAP and Log - MAP of turbo codes[J]. IEEE Electronics Letters, 2004, 40(4): 251 - 252.
- [12] Papaharalabos S, Sweeney P, Evans B G. SISO algorithm based on combined max/max * operations for turbo decoding [J]. IEEE Electronics Letters, 2005, 41(3): 142 - 143.
- [13] 曹敏,尹虹,王国栋,等.基于 SCCC 结构非相干 MAP 译码的简化算法[J].电子与信息学报, 2010, 32(10): 2526 - 2530.

CAO Min, YIN Hong, WANG Guo - dong, et al. Simplified Noncoherent MAP Decoding Algorithm Based on SCCC Structure [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2010, 32(10): 2526 - 2530. (in Chinese)

作者简介:

李思佳(1987—),男,陕西西安人,2009年获学士学位,现为硕士研究生,主要研究方向数据链信道译码技术;

LI Si - jia was born in Xi'an, Shaanxi Province, in 1987. He received the B. S. degree from Guangxi University in 2009. He is now a graduate student. His research concerns channel decoding technology for TADIL.

Email: lsj051@126.com

毛玉泉(1961—),男,陕西西安人,1983年毕业于西安电子科技大学获学士学位,1990年毕业于国防科技大学获硕士学位,现为教授、硕士生导师,主要研究方向为数据链信息融合及信道编码技术;

MAO Yu - quan was born in Xi'an, Shaanxi Province, in 1961. He received the B. S. degree from Xidian University and the M. S. degree from National University of Defense Technology in 1983 and 1990, respectively. He is now a professor. His research concerns information fusion and channel coding technology for TADIL.

郑秋容(1973—),男,福建仙游人,2007年获工学博士学位,现为讲师,主要研究方向为数据链天线技术;

ZHENG Qiu - rong was born in Xianyou, Fujian Province, in 1973. He received Ph. D. degree from National University of Defense Technology in 2007. He is now a lecturer. His research direction is antenna for TADIL.

张建安(1986—),男,甘肃金昌人,2009年获学士学位,现为硕士研究生,主要研究方向为数据链导航技术;

ZHENG Jian - an was born in Jinchang, Gansu Province, in 1986. He received B. S. degree from Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 2009. He is now a graduate student. His research concerns navigation for TADIL.

李波(1974—),男,山东青岛人,2007年获工学博士学位,现为副教授,主要研究方向为信道编码、战术数据链。

LI Bo was born in Qingdao, Shandong Province, in 1974. He received Ph. D. degree from National University of Defense Technology in 2007. He is now an associate professor. His research concerns channel coding and TADIL.