

文章编号: 1001-893X(2011)01-0120-05

压缩感知的发展与应用^{*}

吴凌华¹, 张小川²

(1. 海军驻成都地区航空军事代表室, 成都 610091; 2. 中国兵器工业第 209 研究所, 成都 610041)

摘要: 压缩感知(Compressed Sensing, CS)是近年来新兴的一种信号获取技术。沿着 CS 理论的发展历程介绍了 CS 理论框架, 给出了其严格的数学描述, 着重讨论了对原始信号的重构技术, 最后介绍了一些可能的应用。

关键词: 压缩感知; 基追踪; 匹配追踪; 限制等距离性质; 发展与应用

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2011.01.024

Development and Application of Compressed Sensing

WU Ling-hua¹, ZHANG Xiao-chuan²

(1. Military Representatives Office of Navy in Chengdu, Chengdu 610092, China;

2. No. 209 Institute of China North Industries Group Corporation, Chengdu 610041, China)

Abstract: Compressed Sensing (CS) is an emerging signal acquisition technology. This paper introduces the theory framework of CS, gives its strict mathematic description, focuses on the reconstruction of the original signal, and finally describes some possible applications.

Key words: compressed sensing(CS); basis pursuit; matching pursuit; restricted isometric property(RIP); development and application

1 引言

传统的信号获取技术是一种基于信号波形的信号获取技术, 一般需要经过 A/D 采样与压缩两个环节。其中, A/D 采样是基于经典的奈奎斯特采样理论, 即采样速率必须大于信号带宽的两倍才能保证无失真采样; 压缩是指丢弃那些采样值较小且不重要的采样数据。通常, 经过压缩后得到的数据相比 A/D 采样得到的数据要少得多, 这意味着在 A/D 采样环节中存在着极大的“浪费”。换句话说, 有大量的硬件资源将被消耗用来采集那些最终将被丢弃的数据。这种“浪费”引发了一个很自然的问题, 是否有可能将这两个环节合并, 直接对信号中的有用数据采样。如果可行, 在信号的获取环节硬件的开销将大为减少, 或者利用低性能的硬件获取更高的性能。

近年来引起人们广泛关注的压缩感知(Compressed Sensing, CS)理论从正面回答了这一问题, 并且得到了一系列鼓舞人心的成果^[1-4]。CS 理论是基于信号“信息”的一种采样技术, 是对信号更为本质的描述。

2 压缩感知的数学描述

CS 是一种在采样环节就同时压缩的技术, 其应用前提是要求信号是稀疏的。然而, 常见的信号即使在变换域中也不具备良好的稀疏性, 在保证精度的前提下, 可以将稀疏性要求放松为信号的可压缩性。目前, 尚无关于可压缩信号的统一定义。一般而言, 如果信号在某个线性变换下, 其变换系数呈现出较快的衰减性, 即可认为是可压缩信号。换言之, 信号的可压缩性实际衡量了信号中有用信息成分的

^{*} 收稿日期: 2010-10-18; 修回日期: 2010-12-01

占据范围^[5]。

考虑一个可压缩实值信号 $x \in R^n$, 在某个线性变换 Ψ 中有变换系数向量 α , 写为矩阵形式即:

$$x = \Psi\alpha \tag{1}$$

式中, x 有可压缩性意味着 α 中分量的降序排列会呈现出较快的衰减性。假定在 α 中只有 s 个较大的分量, 其余分量全部置 0, 可以得到一个新的关于 α 的近似向量, 记为 α_s 。由 α_s 的构造过程可知下式成立:

$$\|\alpha_s\|_0 = s \tag{2}$$

式中, $\|x\|_0 = |\text{supp}(x)|$ 。这里要求 $s < n$, 则 α_s 是严格的 s 稀疏向量。由 α 可以严格重构得到 x , 而由 α_s 可以得到 x 的一个近似值 x_s 。 α_s 的构造过程实际可看作传统的信号获取技术中的压缩环节。这意味着对于一个长度为 n 的信号 x , 经过线性变换以后得到的向量 α 只需要获取其 s 个较大的分量值, 即可在保证足够的精度条件下实现对 α 的压缩。这实际包含两个问题: 一个是 s 大小的确定, 另一个是 s 个分量的位置的确定。

显然, s 越小, 信号的可压缩程度越高, 而对于一个任意信号, 其最小 s 的确定实际是一个最稀疏表示的问题, 如何确定一个具备普适性的线性变换使得信号在这种变换下尽可能地稀疏或可压缩是当前研究的热点^[6~9]。 s 个分量的位置确定更为复杂, 这源于信号的不确定性。人们希望寻求一种非自适应的信号获取方式: 对于任意的长度为 n 的信号, 都可以采集固定长度为 m 的线性测量值 $y \in R^m$, 并且由这 m 个测量值可以以非常高的精度甚至是严格地重构原始信号。这里的非自适应意指对任意的信号都可以应用一个统一的方法进行压缩采样, 这种方法和信号无关。容易看出, $s < m < n$ 。这需要构造一个 $m \times n$ 的感知矩阵 Φ , 实现对信号 x 的压缩感知。利用矩阵形式可以将上述过程写为^[1]

$$y = \Phi x \tag{3}$$

将式(1)代入即可得到:

$$y = \Phi\Psi\alpha = A\alpha \tag{4}$$

式中, $A = \Phi\Psi$ 。

在经典的信号获取理论中, 并不需要感知矩阵 Φ 而仅需要表示矩阵 Ψ , 并且这个表示矩阵 Ψ 是一个正交矩阵。换句话说, 在经典的信号获取理论中, 信号的表示过程即是信号的感知过程。感知得到的采样向量 y 与信号向量 x 有相同的势, 而后需要一个对采样数值的判决和迭起的压缩环节, 即信号的感知与压缩是分离的。而在 CS 理论中, 由于表

示矩阵的精心选择(并不局限于正交矩阵而可以是任意的矩阵)使得信号可以被稀疏表示, 这使得可以应用一个相比信号空间维度要低得多的感知空间, 即 $m \times n$ 的感知矩阵 Φ 感知得到信号的低维投影, 这样信号的感知与压缩合二为一而成为一个环节。大量的理论分析与实践都表明, 利用 CS 理论可以突破奈奎斯特采样准则, 使得信号的采样率可以下降到 $O(n \lg n)$ ^[10~11]。

3 原始信号的重构

在 CS 理论中, 感知得到的原始信号在低维空间上的投影, 在数学上表现为式(4)是一个欠定方程。欠定方程通常没有确定解, 然而如果保证解是稀疏的, 则可能有定解。事实上, 利用 CS 所得到的采样值 y 中的每一个分量都是 α 中所有分量的一种加权线性组合, 换言之, 每一个测量值中都包含了 x 的所有信息, 这是 x 可能实现重构的前提。求解式(4)的最稀疏解, 实际可归结于求解这样的一个问题^[12]:

$$(P_0) \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad \text{s.t.} \quad y = A\alpha \tag{5}$$

需要强调的是, 利用式(5)所解得的实际上是 α_s 。也就是说, 式(5)是式(4)的一种近似表达。式(4)实际也可看作是信号 y 在字典 A 中的一个稀疏分解问题, 故而稀疏分解理论中已有的算法可以得到应用, 这主要有基追踪(Basis Pursuit, BP)^[13]和匹配追踪(Matching Pursuit, MP)^[14]两种算法。

3.1 BP 算法

BP 算法的基本思想是把 P_0 改写为

$$(P_1) \min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad y = A\alpha \tag{6}$$

式中, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 。BP 算法实际上是利用凸的 l_1 范数对非凸的 l_0 范数进行了松弛。更进一步, 如果令 $\tilde{A} = [A \quad -A]$, $\tilde{\alpha} = [\alpha_+^T \quad \alpha_-^T]^T$, 则凸规划 P_1 可以转化为线性规划:

$$(LP) \min_{\tilde{\alpha}} l^T \tilde{\alpha} \quad \text{s.t.} \quad x = \tilde{A}\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} \geq 0 \tag{7}$$

则 P_1 的解 α 可表示为: $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$ 。线性规划可以应用单纯形法和现代的内点法加以解决, 其中内点法收敛速度更快更适用于大规模问题, 这样就解决了由非凸的 l_0 范数所带来的高计算复杂度困难。

需要指出, P_1 只是对 P_0 的一种凸松弛近似, 两者的解并不总是一致, 甚至有可能误差巨大, 故必须

研究两种规划下得到的解之间的误差关系。从式(5)不难看出,要严格地重构原始信号 x ,需保证 P_1 必须有唯一解,即要求感知矩阵不会将两个不同的 S 稀疏信号映射到同一个观测值,这实际上是要求从感知矩阵中任意抽取 S 列构成的矩阵都是非奇异的。这个条件进一步可放宽到,感知矩阵中抽取任意 $2S$ 列构成的矩阵都是非奇异的^[15]。更为严格的讨论是利用所谓的限制等距性质(Restricted Isometric Property, RIP)^[16~17]。 s -有限等距常数定义为,最小的 $\delta_s \geq 0$,对任意稀疏度不大于 s 的稀疏信号 x ,都使得下式成立:

$$(1 - \delta_s) \|x\|_2^2 \leq \|A_s x\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|x\|_2^2 \quad (8)$$

式中, A_s 是由 A 中任意抽出的 s 列所构成的矩阵。不难看出,如果矩阵 A_s 是正交矩阵,则 δ_s 恒为 0。故矩阵的 RIP 实际上是评价了一个非正交矩阵的一种非正交的程度。另一方面,由 A 构成 A_s 要求任意抽取,这就要求信号 x 在 A 的每一列上的能量投影都尽可能地均匀。

如果对矩阵 A 来说,其 $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$,则利用 P_1 所得到的重构信号 $\tilde{x}$ 的重构误差为^[15]

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x\|_2 &\leq C_0 \cdot \|x - x_S\|_1 / \sqrt{S} \\ \|\tilde{x} - x\|_1 &\leq C_0 \cdot \|x - x_S\|_1 \end{aligned} \quad (9)$$

式中, C_0 为常数。显然,如果原始信号是严格的 s 稀疏信号,则在上述条件下原始信号可以得到严格重构。然而矩阵的 RIP 并不容易判断,矩阵是否有 RIP 性质的判断同样是一个组合复杂度问题。基于此,学者们也提出了一些等价的判断方法。如果观测矩阵 Φ 与稀疏矩阵 Ψ 不相干,则 A 在很大概率上满足 RIP 性质。

3.2 MP 算法

MP 算法实际上是一种贪婪算法,它将字典 A 分成许多子字典,每次选择与当前近似解与真实解之间残差最相关的原子,经过数次迭代,最终即可得到足够精度的近似解。如果残差随着迭代的进行递减,则可以保证算法收敛^[14]。MP 算法虽然在实际应用中取得了良好的效果,但其理论研究还不太完善,对于其重构的精确程度以及收敛的速度都还有待深入研究。

BP 算法与 MP 算法相比较,BP 算法求解全局最优解,理论性能好,但计算复杂度高;MP 算法用局部最优解逼近全局最优解,计算复杂度相对较低,但稳定性较差。在实践中发现,在一定条件下,MP 与 BP

可以获得同样的结果,这预示着两者之间似乎存在着更深层次的关系,但这种关系还没有令人满意的解释。由于 MP 算法的计算复杂度更小,故而在应用中更受重视。学者们相继提出了一系列 MP 算法的改进形式,如正交匹配追踪(OMP)^[18]、分段匹配追踪(StOMP)^[19]、树形匹配追踪(TMP)^[20]等。

4 测量矩阵的设计

应用 CS 理论以突破奈奎斯特采样定理的限制,需要保证信号 x 在表示矩阵 Ψ 中的表示向量 α 与观测向量 y 之间通过感知矩阵 A 建立起一种双射关系。更为精确的说,即是要求感知矩阵 A 具备 RIP 性质。由于 $A = \Phi\Psi$,而 Ψ 是事先固定的表示矩阵,故 A 的设计可转化为对测量矩阵 Φ 的设计。如果测量矩阵 Φ 与表示矩阵 Ψ 不相干,则感知矩阵 A 以极大概率具备 RIP 性质。由于 RIP 中 A_s 的构造存在一种任意性,故而利用随机分布设计的 Φ 更有可能使得 A 满足 RIP 性质。 Φ 中元素的随机性使得其与 Ψ 以极大概率不相干。

当前,在理论上研究比较多的是高斯随机矩阵。所谓高斯随机矩阵是指矩阵的每个元素是从某一个零均值、方差为 $1/n$ 的高斯随机分布中抽取得来。理论与实验都表明,利用高斯随机分布所构造的矩阵可以以极大概率具备 RIP 性质,并且在这样的感知矩阵下,当采样值 $m \geq cs \lg(n/s)$ 时,其中 c 是很小的常数,则可以极大概率重构 s 稀疏的原始信号^[2,16]。事实上,其它类型的随机矩阵也有类似的性质。

目前,对于测量矩阵的设计主要是基于随机过程,导致基于此基础的 CS 应用都建立在概率基础上,这导致即使性能非常好的算法在实际应用中也有可能失败。如何保证 CS 在实际应用中能够绝对并且严格地实现信号的压缩与重构仍然是一个亟待解决的难题。

5 CS 的应用

CS 理论一经提出,即引起了学界的广泛兴趣。CS 理论提供了一种更为灵活也更为本质的认识方法,故而其应用是多方面的,如雷达、成像、图像处理、数据重构、低速模数转换、无线传感器网络等,其中有关图像的应用发展最为迅猛。

在对图像数据的获取方面,Rice 大学报道了一

种单像素照相机^[1]。这种相机利用由单元可以随机转动的数字微反射镜器件(Digital Micromirror Device, DMD)实现了测量矩阵 Φ , 最终可以以单像素实现高分辨率的光学成像。此装置虽然有些极端,但清楚地表明了对那些实时性要求不高的场合,前端传感器的规模可以大大压缩。

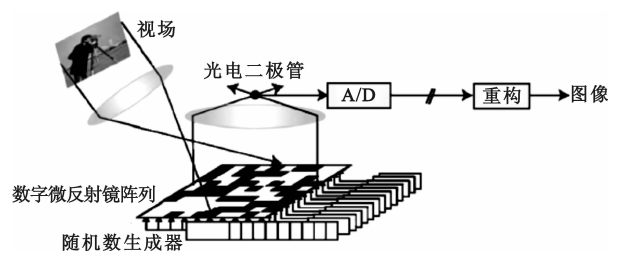


图 1 单像素 CS 相机
Fig.1 Mono-pixel camera

这也意味着,在同等传感器规模下可以应用 CS 以获得质量更好的图像。众所周知,核磁共振成像时,要获得清晰的图像,所需的成像时间相对较长,这使得其应用有了很大的限制。应用 CS 后,可以大大减少成像时间,而影响质量仍然可以得到保证^[23]。对图像中特定对象的快速检测与识别一直是一个难题。文献[24]报道了一种新的检测方法(图 2),利用 CS 理论实现了网格的自适应剖分,兼顾了检测时间与检测效率。

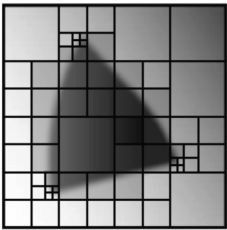


图 2 图像顶点的自适应检测
Fig.2 Adaptive detection of image top

事实上,CS 的应用前景是极为广阔的,从形式上看,对象被压缩仅是表示形式的简单,但本质上,这种简单是对研究对象更为深刻的描述,这种描述不在局限于对象的“外形”描述,而是对其内部结构的刻画。换句话说,利用 CS 理论可以源头上降低复杂性,这对后续的各种处理环节都是有利的,但随之而来的是重构复杂性的增加。不过,前端的采集往往需要硬件完成,而后端重构一般是通过软件完成,所以 CS 实质上是软件效率换取硬件成本。

从目前公开报道的文献来看,虽然 CS 的理论框架已基本完备,但在各个环节的执行效率还未得到严格的分析,故而基于 CS 的各种应用基本上还处于实验阶段,更多的是某种现象的报道,离实用还有相当距离。

6 总结与展望

作为一门新兴的技术,CS 理论的框架虽然已经趋于完善,但仍有许多问题亟待解决。利用 CS 理论,对信号的认识从其波形深入到其内涵信息,是对信号更为本质的认识。本文全面阐述了 CS 技术的理论框架、数学描述,介绍了其中的关键技术,并讨论了其可能的应用。CS 的核心思想是以提高后端信号处理的复杂度来换取前端信号获取复杂度的降低,从而使得信号的采样率可以突破传统的奈奎斯特采样准则。从现有的研究现状而言,CS 采样的综合成本与传统采样技术比较并未得到显著的下降。但在一些如星载、无线传感器网络、数据恢复等对硬件资源要求极为苛刻并且对信号处理的实时性要求不高的场合,CS 技术极具价值。要进一步拓展 CS 的应用,需要更深入地研究重构算法,特别值得注意的是对分数阶范数的研究。

参考文献:

[1] Baraniuk R G. Compressive Sensing. Signal Processing Magazine[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118 – 121.

[2] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 – 1306.

[3] Candès E J. Compressive sampling[C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid, Spain: IEEE, 2006:1433 – 1452.

[4] Candès E J, Wakin M B. An Introduction To Compressive Sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21 – 30.

[5] Cohen A, Dahmen W, DeVore R. Compressed sensing and best k – term approximation[J]. American Mathematical Society, 2009, 22(1): 211 – 231.

[6] Yinghao L, Quan X, Xinghao D, et al. A Novel Dictionary Design Algorithm for Sparse Representations[C]//Proceedings of International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization. Sanya, Hainan: IEEE, 2009:831 – 834.

[7] Kreutz – Delgado K, Murray J F, Rao B D, et al. Dictionary learning algorithms for sparse representation[J]. Neural Computation, 2003, 15(2): 349 – 396.

- [8] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. K-SVD: An Algorithm for Designing Overcomplete Dictionaries for Sparse Representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [9] Aase S O, Husoy J H, Skretting J H K, et al. Optimized signal expansions for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(5): 1087-1096.
- [10] Candes E J, Tao T. Near-Optimal Signal Recovery From Random Projections: Universal Encoding Strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [11] Baraniuk R. A lecture on compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [12] Baraniuk R G. Compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 12-13.
- [13] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.
- [14] Mallat S G, Zhifeng Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [15] Candes E, Wakin M. People hearing without listening: An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [16] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [17] Candes E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Comptes Rendus Mathématique, 2008, 346(9/10): 589-592.
- [18] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1): 6-18.
- [19] Wright J. Robust Face Recognition via Sparse Representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210-227.
- [20] Jöreskog K. Sparse approximate solution of partial differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(4): 452-472.
- [21] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081. SHI Guang-ming, LIU Dan-hua, GAO Da-hua, et al. Advances in Theory and Application of Compressed Sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070-1081. (in Chinese)
- [22] Romberg J. Imaging via Compressive Sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 14-20.
- [23] Lustig M, Donoho D, Pauly J M. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.
- [24] Peyre G. Best Basis Compressed Sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(5): 2613-2622.

作者简介:

吴凌华(1978-),男,福建仙游人,2000年于海军工程学院获工学学士学位,现为工程师,主要研究方向为信号处理、自动化控制;

WU Ling-hua was born in Xianyou, Fujian Province, in 1978. He received the B.S. degree from Naval University of Engineering in 2000. He is now an engineer. His research concerns signal processing and automation control.

Email: wlh508508@yahoo.com.cn

张小川(1981-),男,2002年于成都理工大学获工学学士学位,现为工程师,主要从事自动化控制、数字信号处理方面的研究。

ZHANG Xiao-chuan was born in 1981. He received the B.S. degree from Chengdu University of Technology in 2002. He is now an engineer. His research concerns signal processing and automation control.

Email: zxcjy@sina.com

恭祝本刊广大读者、作者朋友们:

新年快乐 身体健康
阖家幸福 万事如意

本刊编辑部