

文章编号: 1001 - 893X(2010)05 - 0056 - 04

# 利用星座扩展降低 OFDM PAPR 的新方法\*

尹志伟, 万毅

(兰州大学 信息科学与工程学院, 兰州 730000)

**摘要:**通过研究利用星座扩展降低 OFDM 中峰均功率比(PAPR)的方法,提出了一种寻找次最优映射向量的新方法——联合搜索(JS)算法。该算法联合相邻的若干子载波,通过比较局部的峰值大小搜索次最优映射向量。仿真结果表明,JS 算法在降低计算复杂度、提高 PAPR 抑制增益以及增强应用灵活性等方面都有明显改进。

**关键词:**正交频分复用;峰均功率比;星座扩展;联合搜索算法

**中图分类号:**TN911.72 **文献标识码:**A **doi:**10.3969/j.issn.1001-893x.2010.05.012

## A New PAPR Reduction Method via Constellation Extension for OFDM

YIN Zhi-wei, WAN Yi

(School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Through investigating the PAPR(Peak-to-Average Power Ratio) reduction method via constellation extension, a new method is proposed to find a suboptimal constellation mapping solution, the joint searching (JS) algorithm. The method searches the suboptimal mapping by combining several adjacent sub-carriers and comparing the local peak value. Simulation results show that JS method performs better in the aspects of computational complexity, PAPR suppression performance and application flexibility.

**Key words:** OFDM; PAPR; constellation extension; joint searching algorithm

### 1 引言

正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)是一种典型的多载波调制技术,因其具有抗多径衰落、抗脉冲干扰、频谱利用率高等特点,目前已被广泛应用于如 IEEE802.11、IEEE802.16 以及欧洲的地面数字视频广播标准 DVB-T 等<sup>[1]</sup>多种通信标准中。然而,OFDM 有一个非常严重的缺陷——很高的峰均功率比(Peak-to-Average Power Ratio, PAPR)<sup>[2]</sup>。目前减小 PAPR 的方法主要有选择性映射法、部分传输序列法、非线性压缩变换法以及星座图扩展法等<sup>[3-4]</sup>。其中, Y. J. Kou 等人提出的星座图扩展方案,可在增加少量发射功率的前提下有效降低 PAPR<sup>[5]</sup>,而且不引入干

扰,不需要发送附加信息。本文针对该方案中搜索次最优映射向量的问题进行研究,提出了一种新的单步峰值最小算法,并将该算法一般化为联合搜索算法。仿真结果表明,与文献[5]的算法相比,本文的算法不仅能够在更低的计算复杂度下获得更高的 PAPR 抑制增益,而且可以根据实际需要来调整参数,以达到计算复杂度与 PAPR 之间的平衡,具有很强的应用灵活性。

### 2 OFDM 中的 PAPR 问题

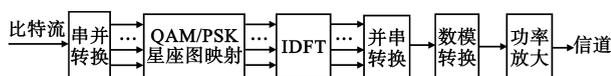


图 1 OFDM 系统发射端的结构框图

Fig. 1 Block diagram of OFDM transmitting terminal

\* 收稿日期:2009-12-04;修回日期:2010-03-08

如图 1 所示,在 OFDM 系统中高速率的数据流经过串并转换被分为  $N$  路低速数据流,其中的每个码元映射为星座图上的一个点,此时数据记为向量  $\mathbf{X} = [X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}]^T$ 。经过 IDFT(逆离散傅里叶变换)后  $N$  路数据被调制到相互正交的子载波上,得到时域的 OFDM 符号,记为向量  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}]^T$ ,其中第  $n$  个元素可表示为

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

即  $\mathbf{x}$  中的每一项都是  $N$  个频域信号的线性叠加,所以有可能出现很高的峰值。如果峰值太大,超过数模转换器允许的最大值或功率放大器的线性工作范围,则会使发送信号产生畸变,影响接收端对信号的处理,最终导致系统整体性能下降。为了使问题一般化,人们通常用峰均功率比(PAPR)代替峰值来描述这一问题,其定义为

$$PAPR = \frac{\max_n |x_n|^2}{E\{|x_n|^2\}} \quad (2)$$

式中,  $E\{\cdot\}$  表示求均值。

### 3 星座图扩展技术

利用星座图扩展来减小 PAPR 的基本思想是:增加码元的星座映射方式,并根据实际发送码元的组合形式来选择具有较小 PAPR 值的映射方式。

文献[5]中提出的 16QAM 星座图扩展方案如图 2 所示,该方案是将图 2(a)中星座图外层的点(圆形点)扩展为图 2(b)中的两种表示方式(圆形点和三角形点),其余点不做扩展。例如,扩展后星座图中,数据  $X_k = 15$  (即 1111)对应的坐标点有两个,即图 2(b)中的  $X_k^0$  和  $X_k^1$ 。

为了便于叙述,我们采用如下表示方式,即将向量  $\mathbf{X}$  的星座映射规则定义为映射向量  $\mathbf{I} = [i_0, i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_{N-1}]$ ,  $i_k \in \{0, 1\}$ 。当  $i_k = 0$  时,表示第  $k$  个码元映射为原有点(圆形点和星形点),映射后码元记为  $X_k^0$ ;当  $i_k = 1$  时,表示第  $k$  个码元映射为扩展点(三角形点),映射后码元记为  $X_k^1$ 。最优的  $\mathbf{I}_{opt}$  是有可能映射规则中使峰值功率最小的映射向量,即为

$$\mathbf{I}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{I}_{opt} \in \{0,1\}^N} \max_{0 \leq n \leq N-1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X_k^i e^{j2\pi kn/N} \right| \quad (3)$$

在图 2(b)的映射关系下,假设在长度为  $N$  的数据中每种码元出现的概率一样,则其中有两种映射

方式的码元个数为  $3N/4$ 。这样的话,可供选择的映射方式有  $2^{3N/4}$  种。若  $N = 64$ ,则每次映射需要进行  $2^{48} \approx 2.8 \times 10^{14}$  次比较。因此,通过穷举法求最优映射向量是不现实的。

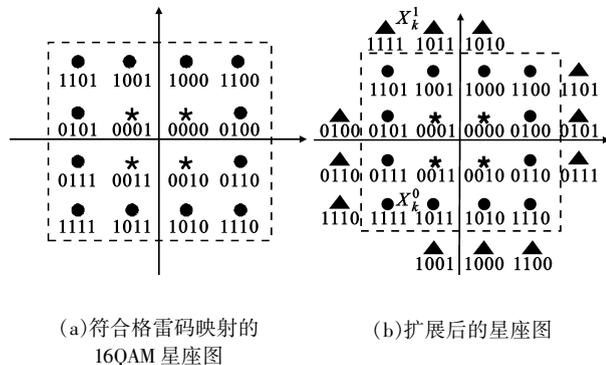


图 2 文献[5]给出的 16QAM 星座图扩展方案 Fig. 2 Extended constellation for 16QAM proposed in [5]

#### 3.1 基于条件概率的贪婪算法

对上述问题,许多文章是利用基于条件概率的贪婪算法来求次最优解<sup>[5-6]</sup>。然而,由于条件概率的计算比较困难,不能直接求解。对于这种问题,数学上一般用去随机化(De-Randomization, DR)算法<sup>[6]</sup>来逼近。DR 算法的迭代公式中有大量的双曲正余弦计算(详见文献[5]中式(17)),复杂度仍然较高。为了进一步降低计算复杂度,Y. J. Kou 等人利用多项式数值逼近来表示双曲正余弦函数,简化了迭代函数,我们称之为 PB(Polynomial Bound)算法(详见文献[5]中式(30))。然而,由于多次采用近似算法,DR 和 PB 算法对 PAPR 的抑制效果也依次被降低。

#### 3.2 单步峰值最小(SPM)算法

文献[7]针对调整发送码元符号位来降低 PAPR 的方法提出了一种快速有效的贪婪算法。这些符号位作为数据一同进行传输。我们将此算法的核心思想应用到基于星座图映射的 PAPR 处理框架中,提出了单步峰值最小(Single-step Peak Minimization, SPM)算法。

IDFT(如式(1))是一个线性叠加的过程,我们可以将该过程分解开来看,若每一次只叠加一个调制后的码元(码元与子载波的乘积),记第  $s$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, N-1$ )次叠加后时域向量为  $\mathbf{x}_s$ ,则其第  $n$  个元素为

$$x_{sn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^s X_k e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

当  $s = N - 1$  时, 上式变为式(1), 即为 IDFT 运算。若已知  $\mathbf{x}_{s-1}$ , 则有:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{s-1} + X_s \mathbf{F}_s \tag{5}$$

式中,  $X_s$  为第  $s$  个频域码元,

$$\mathbf{F}_s = [0, e^{j2\pi s/N}, \dots, e^{j2\pi s n/N}, \dots, e^{j2\pi s(N-1)/N}]^T.$$

假设第 0 个到第  $s - 1$  个码元的映射关系均已确定, 要确定第  $s$  个码元的映射方式, 我们选择使  $\mathbf{x}_s$  峰值最小的一种映射方式, 即:

$$i_s = \arg \min_{i_s \in \{0,1\}} \max_{0 \leq n \leq N-1} |\mathbf{x}_{s-1} + X_s^i \mathbf{F}_s| \tag{6}$$

根据式(6)依次迭代即可求出所有码元的映射方式, 这就是 SPM 算法。此算法每次迭代时最多需要计算 2 次式(4), 而式(4)中复数乘法运算次数为  $N$ , 所以要确定每个码元的映射方式最多需要  $2N$  次复数乘法运算。

### 3.3 联合搜索(JS)算法

我们将 SPM 算法进行扩展后提出了联合搜索(Joint Searching, JS)算法。JS 算法的主要思想是, 每次联合  $J_n$  个相邻码元进行搜索, 这样, 每次可能的映射组合最多有  $2^{J_n}$  种(因为有些码元只有一种映射方式), 通过计算比较可同时确定  $J_n$  个码元的映射方式。通过  $T_n = N/J_n$  次搜索即可确定  $N$  个码元的映射方式(为便于说明, 本文只讨论  $N$  是  $J_n$  的整数倍的情况, 而非整数倍的情况类似)。

将 IDFT 过程分解为  $T_n$  次叠加, 每次叠加  $J_n$  个码元, 记第  $s$  次叠加后时域向量为  $\mathbf{x}_s (s = 0, 1, 2, \dots, J_n - 1)$ , 则其第  $n$  个元素为

$$x_{sn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(s+1)J_n-1} X_k e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \tag{7}$$

当  $s = T_n - 1$  时, 上式变为式(1), 完成 IDFT 运算。若已知  $\mathbf{x}_{s-1}$ , 则:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{s-1} + \sum_{k=sJ_n}^{(s+1)J_n-1} X_k \mathbf{F}_k \tag{8}$$

式中,  $X_k$  为第  $k$  个频域码元,

$$\mathbf{F}_k = [0, e^{j2\pi kn/N}, \dots, e^{j2\pi kn n/N}, \dots, e^{j2\pi k(N-1)/N}]^T.$$

假设已知前面 0 到  $s - 1$  次叠加时码元(即前面第 0 个到第  $sJ_n - 1$  码元)的映射方式, 将第  $s$  次叠加时  $J_n$  个码元(第  $sJ_n$  到第  $(s + 1)J_n - 1$  个码元)的映射方式记为向量  $\mathbf{I}_s = [i_{sJ_n}, i_{sJ_n+1}, \dots, i_{(s+1)J_n-1}]$ , 则我们在所有可能的  $\mathbf{I}_s$  中选择使  $\mathbf{x}_s$  峰值最小的一种做为该组  $J_n$  个码元的映射方式, 即:

$$\mathbf{I}_s = \arg \min_{\mathbf{I}_s \in \{0,1\}^{J_n}} \max_{0 \leq n \leq N-1} \left| \mathbf{x}_{s-1} + \sum_{k=sJ_n}^{(s+1)J_n-1} X_k^i \mathbf{F}_k \right| \tag{9}$$

根据上式依次迭代则可求出所有码元的映射方式。

该方法中, 每次迭代最多需要计算  $2^{J_n}$  次式(8), 而每次迭代可确定  $J_n$  个码元映射方式, 所以平均每个码元需要计算式(8)的最多次数为  $2^{J_n}/J_n$ 。又因式(8)中有  $J_n N$  次复数乘法运算, 所以每个码元所需要的最多复数乘法次数为

$$C = 2^{J_n}/J_n \times J_n N = 2^{J_n} N \tag{10}$$

## 4 仿真及应用分析

仿真采用互补累积分布函数(CCDF)来衡量系统的 PAPR 分布。仿真系统参数如下: OFDM 符号长度  $N = 64$ , 过采样因子为 4, 符号个数为 5 000。

图 3 比较了经典 16QAM 星座映射和扩展星座映射(分别用 PB、DR 和 SPM 算法实现)的 CCDF 曲线图。可以看出, 扩展星座图后的 3 种方法都抑制了 PAPR, 其中 SPM 算法效果最好, DR 算法次之, PB 算法最差。图 4 是联合因子取不同值时 JS 算法的对比图, 结果表明, 随着联合因子的逐渐增大, JS 算法对 PAPR 的抑制作用也越来越强。

为了更客观分析 JS 算法特性, 表 1 给出了各种方法的性能比较。表中的 PAPR 抑制增益是指: 在各仿真图中, 纵坐标(CCDF)等于 0.001 时, 16QAM 与各种方法的对应横坐标(PAPRO)之差。而计算复杂度则用每种方法的实际仿真时间与 SPM 算法(即  $J_n = 1$  时的 JS 算法)仿真时间的比值来表示, 即归一化的仿真时间。随着  $J_n$  的增大, JS 算法的计算复杂度逐级增长, 这也验证了公式(10)的结论。因此, JS 算法是在计算复杂度和 PAPR 抑制增益之间取了折衷, 而且我们可以通过修改  $J_n$  来调节两者之间的平衡。

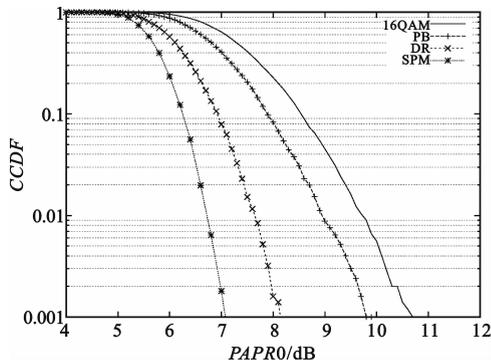


图 3 SPM 算法与 DR 和 PB 算法的比较  
Fig.3 Performance comparison among SPM, DR and PB algorithm

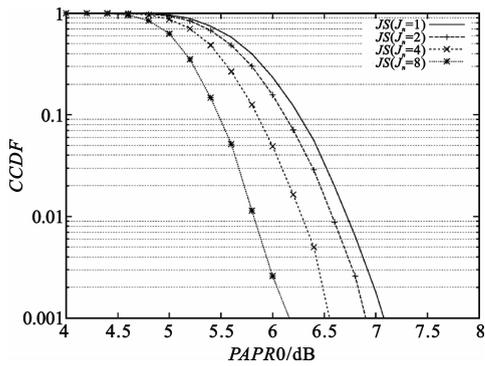


图 4  $J_n$ 取不同值时 JS 算法的比较

Fig.4 Performance comparison of JS algorithm with different value of  $J_n$

表 1 各种算法性能比较

Table 1 Performance comparison of above algorithm

指标	算法类型					
	DR	PB	JS ( $J_n = 1$ )	JS ( $J_n = 2$ )	JS ( $J_n = 4$ )	JS ( $J_n = 8$ )
PAPR 抑制 增益/dB	2.6	0.9	3.6	3.8	4.2	4.6
归一化 仿真时间	2.53	1.26	1	1.31	4.73	66.2

上述仿真系统中的基本参数符合实际情况,如 IEEE802.16 标准。仿真结果显示,JS 算法在复杂度低于 PB 算法的情况下,仍然将抑制增益提高了 2.7 dB(在  $J_n = 1$  时)。目前,由于 OFDM 的高 PAPR 问题,上行链路中一般采用 SC-FDM(单载波频分复用)系统,而不用 OFDM 系统。我们提出的 JS 算法会使利用星座扩展的 OFDM 系统应用于上行链路更加可行。星座扩展的方法会使系统发射功率增加,所以在实际应用中还应考虑发射功率方面的可行性。另外,JS 算法是针对星座扩展后如何选择映射方式而提出的,并不受限于星座图类型的选择,对于星座扩展类的方法具有普适性。

### 5 结束语

PAPR 问题是 OFDM 系统面临的主要问题之一,利用星座图扩展减小 OFDM 的 PAPR 是一类重要方法。本文针对此类方法,提出了一种新的寻找次最优映射向量的解决方案,即联合搜索(JS)算法。研究表明,该算法给出一种解决 OFDM 在上行链路中应用的新思路,具有一定的实用价值。为了进一步改进该算法,在本文工作基础上还可从以下方面进行研究:

(1)如果能够给出计算复杂度和 PAPR 之间的

定量关系,则可大大减小实际系统的优化设计;

(2)目前的星座图扩展方法并未考虑导频的特点,在实际系统中导频的映射不能利用扩展后的星座图,而只能用原始星座图。因此,在考虑导频的情况下研究本文算法的性能有很重要的实际意义。

### 参考文献:

- [1] Prasad R. OFDM for wireless communication systems[M]. London: Artech House, 2004.
- [2] Bahai A R S, Saltzberg B R. Multi-carrier Digital Communications: Theory and Application of OFDM[M]. New York: Mc-Graw-Hill, 1999.
- [3] Han S H, Lee J H. An Overview of Peak-to-Average Power Ratio Reduction Techniques for Multicarrier Transmission [J]. IEEE Wireless Communications, 2005, 12(2): 56 - 65.
- [4] Jiang T, Wu Y. An Overview: Peak-to-Average Power Ratio Reduction Techniques for OFDM Signals[J]. IEEE Transactions on Broadcasting, 2008, 54(2): 257 - 268.
- [5] Kou Y J, Lu W S, Antoniou A. A New Peak-to-Average Power-Ratio Reduction Algorithm for OFDM Systems via Constellation Extension[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2007, 6(5): 1823 - 1832.
- [6] Sharif M, Hassibi B. Existence of Codes With Constant PMEPR and Related Design[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(10): 2836 - 2846.
- [7] Sharif M, Tarokh V, Hassibi B. Peak Power Reduction of OFDM Signals with Sign Adjustment[J]. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(7): 2160 - 2166.

### 作者简介:

尹志伟(1984-),男,山西五寨人,2007 年于兰州大学获学士学位,现为兰州大学硕士研究生,主要研究方向为无线通信技术;

YIN Zhi-wei(male) was born in Wuzai, Shanxi Province, in 1984. He received the B.S. degree in 2007 from Lanzhou University. He is now a graduate student. His research direction is wireless communication.

Email: yinzhw@gmail.com

万毅(1970-),男,陕西西安人,1998 年于美国密歇根州立大学获电气工程和数学两个硕士学位,2002 年于美国莱斯大学获电气工程博士学位,现为兰州大学信息学院教授、博士生导师,主要研究方向是无线通信及信号处理技术。

WAN Yi(male) was born in Xi'an, Shaanxi Province, in 1970. He received the M.S. degree in both electrical engineering and mathematics science in 1998 from Michigan State University and Ph.D. degree in electrical engineering in 2002 from Rice University. He is now a professor and the supervisor for Ph.D. candidate with Lanzhou University. His research concerns wireless communication and signal processing.