

DOI:10. 20079/j. issn. 1001-893x. 220418001

引用格式:李家强,胡张燕,姚昌华,等. 基于自适应加权非凸正则化和全变分的稀疏 SAR 成像[J]. 电讯技术,2023,63(10):1515-1523.
[LI J Q, HU Z Y, YAO C H, et al. A sparse SAR imaging method based on adaptive nonconvex regularization and total variation[J].
Telecommunication Engineering, 2023, 63(10):1515-1523.]

基于自适应加权非凸正则化和全变分的稀疏 SAR 成像^{*}

李家强,胡张燕,姚昌华,郭桂祥,陈金立

(南京信息工程大学 电子与信息工程学院,南京 210044)

摘 要:针对传统压缩感知(Compressive Sensing,CS)重构算法成像精度低及抗噪性能差等问题,提出了一种基于自适应加权极小极大凹罚函数和全变分的稀疏合成孔径雷达(Synthetic Aperture Imaging Radar,SAR)成像重建方法。首先,将加权思想同非凸函数簇中的极小极大凹罚函数结合,以进一步促进解的稀疏性;然后,与全变分判罚函数线性组合构成复合正则化器,以进一步提高抗噪性能;最后,采用交替方向乘子法求解该成像模型,并在求解过程中使用方位-距离解耦算子替换测量矩阵及其厄米特转置以减少存储空间。仿真与实测数据处理结果表明,所提方法相比于其他算法有更好的聚焦性能和重建精度。

关键词:稀疏 SAR 成像;自适应加权;非凸正则化;全变分;极小极大凹罚函数

开放科学(资源服务)标识码(OSID): [微信扫码二维码](#)
[听独家语音释文](#)
[与作者在线交流](#)
[享本刊专属服务](#)

中图分类号:TN957. 51 文献标志码:A 文章编号:1001-893X(2023)10-1515-09

A Sparse SAR Imaging Method Based on Adaptive Nonconvex Regularization and Total Variation

LI Jiaqiang, HU Zhangyan, YAO Changhua, GUO Guixiang, CHEN Jinli

(School of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: For the problems of low imaging accuracy and poor anti-noise performance of traditional compressive sensing reconstruction algorithms, the authors propose a sparse synthetic aperture radar(SAR) imaging reconstruction method based on adaptive weighted minimax concave penalty function and total variation. Firstly, the weighted idea is combined with the minimax concave penalty function in the non-convex function cluster to further promote the sparsity of the solution. Then, the composite regularizer is constructed by linear combination with the total variational penalty function to further improve the anti-noise performance. Finally, the alternating direction multiplier method is used to solve the imaging model. The measurement matrix and its Hermitic transpose are replaced by azimuth-range decoupling operator to reduce the storage space. Simulation and experimental data processing results show that the proposed method has better focusing performance and reconstruction accuracy than other algorithms.

Key words: sparse SAR imaging; adaptive weighting; non-convex regularization; total variation; minimax concave penalty

^{*} 收稿日期:2022-04-18;修回日期:2022-06-17
基金项目:国家自然科学基金资助项目(62071238);江苏省自然科学基金(BK20191399)
通信作者:李家强

0 引 言

合成孔径雷达(Synthetic Aperture Radar, SAR)是最早提出并投入实用的成像雷达,广泛用于各类重点场景监视^[1-2]。由雷达分辨率理论和奈奎斯特采样定理可知,合成孔径雷达系统性能的提高通常伴随着采样数据量的增加,这给系统设计和实现带来了困难。

近年来,随着压缩感知^[3]和相关理论的发展,稀疏信号处理在 SAR 成像中广泛应用,这表明当回波信号具有稀疏性或可压缩性时,能够以远低于奈奎斯特的采样频率,用较少的观测数据高概率地恢复出原信号。传统的压缩感知重构算法如贝叶斯压缩感知(Bayesian Compressed Sensing, BCS)^[4]算法,存在重构精度不高、抗噪性能差等问题。现有的压缩感知 SAR 成像模型中, L_1 正则化是最常见的重构模型^[5]。该模型能够有效抑制场景稀疏时的旁瓣和噪声,但 L_1 范数判罚函数是凸的,解析解是有偏估计^[6],会导致重建结果的偏差效应并最终影响重建精度。针对出现的问题,许多研究集中在非凸正则化和加权 L_1 正则化算法上。如极小极大凹罚(Minimax Concave Penalty, MCP)函数^[7]、 L_q 范数判罚($0 < q < 1$)^[8],以及加权 L_1 正则化算法^[9]等。这些函数在形状上能够更好的逼近 L_0 范数,在减少偏差的同时提高稀疏性,从而提高重建精度。为进一步提高重建精度和抗噪性,文献[10]将图像振幅的全变分范数(Total Variation norm, TV-norm)作为约束条件引入到 SAR 成像模型中,可以保持一定区域内目标的后向散射系数的连续性,进一步降低了噪声。但以上工作都是单一算法的稀疏重构,很难满足获得高质量成像的需求。多种特征、多种算法联合成像能够获得更好的 SAR 成像结果。

针对上述问题,本文提出一种基于自适应加权的非凸正则化和全变分的稀疏 SAR 成像算法,将非凸判罚函数与 TV-norm 罚函数线性结合,在成像模型中形成一个复合正则化器,采用交替方向乘子法求解 SAR 成像模型,并使用方位-距离解耦算子替换测量矩阵及其厄米特转置以减少存储空间且加快信号处理速度。实验结果表明,本文算法具有很好的重构性能与抗噪能力。

1 SAR 回波信号二维稀疏表示模型

图 1 为 SAR 成像几何模型。假设雷达平台沿 y 轴以恒定的速度 v 前行,若雷达发射线性调频

(Linearly Frequency Modulated, LFM) 信号,则理想点目标 $P(x,y)$ 的基带回波为

$$s(t_r, t_a; r) = \iint_D g(x, y) a_a(t_a) a_r\left(t_r - \frac{2R(t_a; r)}{c}\right) \times \exp\left[j\pi\gamma\left(t_r - \frac{2R(t_a; r)}{c}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-j\frac{4\pi}{\lambda}R(t_a; r)\right] dx dy \quad (1)$$

式中: $D = \{(x, y) | x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, y_{\min} \leq y \leq y_{\max}\}$; t_r 和 t_a 分别为距离向快时间和方位向慢时间; r 为点目标 $P(x, y)$ 到雷达航线的垂直距离; $g(x, y)$ 为目标后向散射系数矩阵; $a_a(\cdot)$ 为方位向窗函数; $a_r(t_r) = \text{rect}(t_r/T_p)$ 为发射信号包络, T_p 为脉冲持续时间; c 为光速; γ 为 LFM 信号线性调频率; λ 为波长; $R(t_a; r)$ 为 t_a 时刻雷达与目标间距离,

$$R(t_a; r) = \sqrt{r^2 + v^2 \times (t_a - t_{a_0})^2} \approx r + \frac{v^2}{2r} (t_a - t_{a_0})^2 \quad (2)$$

忽略距离徙动后理想点目标的回波经采样后为

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Phi}_r \mathbf{G} \mathbf{\Phi}_a \quad (3)$$

式中: $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 为均匀采样回波信号, M 为距离向采样点数, N 为方位向采样点数; $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 为观测场景目标点的后向散射矩阵; 矩阵 $\mathbf{\Phi}_r \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 为距离向卷积矩阵,其列是距离向参考函数的共轭与快时间域中采样数的卷积,其中距离向参考函数为 $s_r(t_r) = a_r(t_r) \exp(j\pi\gamma t_r^2)$; 矩阵 $\mathbf{\Phi}_a \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 为方位向卷积矩阵,其行是方位向参考函数的共轭与慢时间域中采样数的卷积,其中方位向参考函数为 $s_a(t_a) = a_a(t_a) \cdot \exp(j\pi k_a t_a^2)$, $k_a = 2v^2 r/\lambda$ 为多普勒调频率。

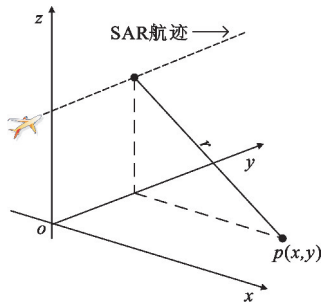


图 1 合成孔径雷达成像几何模型

对信号在距离向与方位向均进行降采样,如图 2 所示,其中灰色部分代表采样点信号。此时均匀采样回波信号 $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 变为随机采样的回波信号 $\mathbf{S}_{2cs} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$; P ($P \leq M$) 为距离向随机采样点数, Q ($Q \leq N$) 方位向随机采样点数。距离向卷积矩阵

Φ_r 变为 $\Phi_{RCS} \in \mathbb{C}^{P \times M}$, 方位向卷积矩阵 Φ_a 变为 $\Phi_{ACS} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$, 二维随机降采样合成孔径雷达回波信号的欠定方程为

$$S_{2CS} = \Phi_{RCS} G \Phi_{ACS} \circ \quad (4)$$

考虑到现实场景中加性噪声影响,式(4)可表示为

$$S_{2ZCS} = \Phi_{RCS} G \Phi_{ACS} + N_Z \circ \quad (5)$$

式中: $S_{2CS} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$ 和 $S_{2ZCS} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$ 为随机采样回波信号; $\Phi_{RCS} \in \mathbb{C}^{P \times M}$ 为距离维观测矩阵; $\Phi_{ACS} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$ 为方位维观测矩阵; $G \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 为待重构目标图像; $N_Z \in \mathbb{C}^{P \times Q}$ 为复高斯白噪声信号。

式(5)表示的信号模型是二维卷积模型,可用两个连续一维方程表示。首先,令 $X \in \mathbb{C}^{M \times Q}$ 作为方位维压缩数据,表达式为

$$X = G \Phi_{ACS}, \quad (6)$$

则式(5)可写为

$$S_{2ZCS} = \Phi_{RCS} X + N_Z \circ \quad (7)$$

式(6)表示方位向压缩感知模型,式(7)表示距离向压缩感知模型。

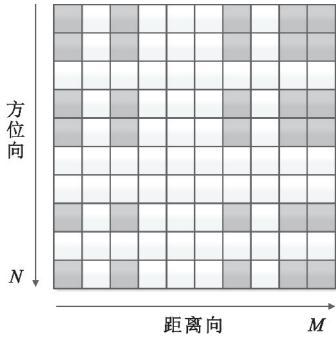


图 2 SAR 回波数据随机采样

求解式(6)和式(7)的过程如下:首先,求解欠定方程(7)得到距离向压缩后的信号;其次,将接收到的回波 S_{2ZCS} 分解为列向量形式,其表达式为

$$S_{2ZCS} = [s_1, s_2, \dots, s_Q] \circ \quad (8)$$

同时, X 分解为列向量形式:

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_Q] \circ \quad (9)$$

则式(7)表示为

$$s_q = \Phi_{RCS} x_q + n_z, \quad q = 1, 2, \dots, Q. \quad (10)$$

式中: $s_q \in \mathbb{C}^{P \times 1}$; $x_q \in \mathbb{C}^{M \times 1}$; $n_z \in \mathbb{C}^{P \times 1}$; Q 为方位向接收到的脉冲数。

稀疏 SAR 成像过程如式(10)可视为一个线性逆问题,求解线性逆问题的常用算法是最小正则化线性最小二乘代价函数,其表达式为

$$\min_{x_q} \|s_q - \Phi_{RCS} x_q\|_2^2 + \lambda p(x_q). \quad (11)$$

式中: $p(\cdot)$ 为惩罚项或正则项; λ 为正则化参数。为提高 x_q 的稀疏性,应选 L_0 范数作为 x_q 的判罚函数。但 L_0 范数属于非确定性多项式时间复杂度问题,需组合搜索解决,维度增加时难以实现,需要修改判罚函数将其转化为等价问题求解。对于稀疏信号,当测量矩阵 Φ_{RCS} 满足有限等距性质条件时, L_0 范数优化问题等价于 L_1 范数优化问题,即将非凸问题转换为凸问题。基于 L_1 正则化的 SAR 成像模型为

$$\min_{x_q} \|s_q - \Phi_{RCS} x_q\|_2^2 + \lambda \|x_q\|_1. \quad (12)$$

式中: $\|x_q\|_1 = \sum_{i=1}^N (|x_{q_i}|)$, x_{q_i} 是 x_q 的第 i 个元素。

由于 L_1 正则化是有偏估计,假设 $x_q^{l_1}$ 是 L_1 正则化的结果, S 是它的支撑集,由文献[11]知,对于 $x_q^{l_1}$ 的非零部分,估计公式为

$$x_s^{l_1} = (\Phi_s^H \Phi_s)^{-1} \Phi_s^H s - \lambda (\Phi_s^H \Phi_s)^{-1} \text{sign}(x_s^{l_1}) = (\Phi_s^H \Phi_s)^{-1} (\Phi_s^H s - \lambda \text{sign}(x_s^{l_1})). \quad (13)$$

式中: Φ_s 是 Φ_{RCS} 在支撑集 S 上的列子矩阵; $x_s^{l_1}$ 是 $x_q^{l_1}$ 在支撑集 S 上的子向量; $(\cdot)^H$ 表示埃尔米特转置; $(\Phi_s^H \Phi_s)^{-1} \Phi_s^H s$ 是最小二乘估计,也称为无偏估计; $\lambda (\Phi_s^H \Phi_s)^{-1}$ 是有偏估计。因此,基于 L_1 正则化的式(12)的解是统计信号处理中相关理论的有偏估计。

2 基于 TV 和非凸正则化的合成孔径雷达成像

2.1 基于 MC 函数的稀疏 SAR 成像

基于 L_1 正则化的 SAR 成像模型会影响重建精度,而基于非凸正则化的 SAR 成像模型因其非凸函数的几何性质更接近 L_0 范数可以在提高稀疏性的同时减少偏差。基于非凸正则化的 SAR 成像模型为

$$\min_{x_q} \frac{1}{2} \|s_q - \Phi_{RCS} x_q\|_2^2 + \lambda p_{NC}(x_q). \quad (14)$$

式中: $p_{NC}(\cdot)$ 表示非凸判罚。

求解非凸优化问题关键在于计算近端算子问题,本文采用迭代收缩阈值 (Iterative Shrinkage Threshoding, IST)^[12] 算法来求解近端算子问题。

针对式(14),假设 $f(x_q) = \frac{1}{2} \|s_q - \Phi_{RCS} x_q\|_2^2$, 则式(14)可表示为

$$\min_{x_q} f(x_q) + \lambda p_{NC}(x_q). \quad (15)$$

在点 $\mathbf{x}_q^k$ 处对 $f(\mathbf{x}_q)$ 二阶泰勒展开。当 $\nabla f(\mathbf{x}_q^k)$ 满足 L-Lipschitz 连续条件时, $f(\mathbf{x}_q)$ 为

$$f(\mathbf{x}_q) = \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x}_q - \left(\mathbf{x}_q^k - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{x}_q^k) \right) \right\|_2^2 + C(\mathbf{x}_q^k)。(16)$$

式中: $C(\mathbf{x}_q^k)$ 是常数项, 不依赖于 $\mathbf{x}_q$ 。则通过生成序列 $\{\mathbf{x}_q^k\}$ 来求解优化问题式(14), 即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_q} & \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x}_q - \left(\mathbf{x}_q^k - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{x}_q^k) \right) \right\|_2^2 + \lambda p_{\text{NC}}(\mathbf{x}_q) = \\ & \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_q} \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x}_q - \left(\mathbf{x}_q^k + \frac{1}{L} \Phi_{\text{RCS}}^H(s_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q) \right) \right\|_2^2 + \\ & \lambda p_{\text{NC}}(\mathbf{x}_q)。 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{令 } \mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{x}_q^k - \frac{1}{L} \nabla f(\mathbf{x}_q^k) = \mathbf{x}_q^k + \frac{1}{L} \Phi_{\text{RCS}}^H(s_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q^k),$$

则式(14)等价于以下近端算子问题:

$$\mathbf{x}_q^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_q} \frac{L}{2} \left\| \mathbf{x}_q - \mathbf{z}^{k+1} \right\|_2^2 + \lambda p_{\text{NC}}(\mathbf{x}_q)。 \quad (18)$$

由上述过程可知, 在 IST 算法中首先沿 $-\nabla f(\mathbf{x}_q^k)$ 方向进行步长为 $1/L$ 的下降, 再求解近端算子问题。若判罚函数 $p_{\text{NC}}(\mathbf{x}_q)$ 是一个可写为两个凸函数差的非凸非光滑函数, 且满足公式 $\lambda p_{\text{NC}}(\mathbf{x}_q) = \lambda \sum_{i=1}^N p_{\text{NC}}(\mathbf{x}_{q_i})$ 以及目标函数有下界, 则式(18)中的近端算子问题存在一个简单的封闭解。由文献[13]知, MC 判罚函数表达式和 MC 判罚函数的阈值函数表达式为

$$\lambda p_{\text{MC}}(\mathbf{x}_{q_i}) = \begin{cases} \left(\lambda |x_{q_i}| - \frac{x_{q_i}^2}{2\theta} \right), & |x_{q_i}| \leq \theta \\ \frac{\lambda\theta}{2}, & |x_{q_i}| > \theta \end{cases}。 \quad (19)$$

$$\text{threshold}_{\text{MC}}(z_i, \lambda) = \begin{cases} 0, & |z_i| < \lambda \\ \theta\lambda \frac{|z_i| - \lambda}{\theta\lambda - \lambda} \operatorname{sign}(z_i), & \lambda \leq |z_i| \leq \theta\lambda \\ z_i, & |z_i| > \theta\lambda \end{cases} \quad (20)$$

式中: $p_{\text{MC}}(\mathbf{x}_q) = \sum_{i=1}^N p_{\text{MC}}(\mathbf{x}_{q_i})$; θ 是 MC 判罚函数的参数, 且 $\theta > 1$ 。观察可知 MC 判罚函数表达式符合上述三个假设, 所以本文选用 MC 判罚函数作为非凸判罚的代表。

本文采用方位-距离解耦算子代替测量矩阵及其厄米特转置加快处理速度。首先假设 $\mathcal{G}(\cdot)$ 是原始数据生成算子, $\mathcal{I}(\cdot)$ 是成像算子, 方位-距离解耦方案^[14]被描述为

$$\begin{cases} \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q \equiv \mathcal{G}(\mathbf{x}_q) \\ \Phi_{\text{RCS}}^H s_q \equiv \mathcal{I}(s_q) \end{cases}。 \quad (21)$$

本文原始回波数据在方位向和距离向采样点个数分别为 M 和 N , 且 $N_s = N \times M$, 基于匹配滤波方法的计算复杂度为 $O(N_s \lg(N_s))$; 当迭代次数为 I 时, 基于测量矩阵的稀疏 SAR 成像方法的计算复杂度将达到 $O(IN_s^2)$, 而基于方位-距离解耦的稀疏 SAR 成像的计算复杂度仅为 $O(N_s \lg(N_s))$ 。因此, 基于方位-距离解耦的稀疏 SAR 成像方法的加速比为 $r_c = O(N_s / \lg(N_s))$ 。

2.2 基于 MC 函数和 TV 的稀疏 SAR 成像

非凸正则化旨在增强 SAR 图像中基于点的特征。为提高目标重建精度, 在稀疏正则化基础上引入 TV-norm。对于二维场景, 图像向量 $\mathbf{x}_q$ 的离散各项同性 TV-norm 定义如下:

$$\text{TV}(|\mathbf{x}_q|) = \sum_{i,j} \left\| \nabla(|\mathbf{A}|_{i,j}) \right\|_2。 \quad (22)$$

式中: $\mathbf{A}$ 为图像向量 $\mathbf{x}_q$ 对应的二维复数矩阵; $|\cdot|$ 为幅值; $\nabla(|\mathbf{A}|_{i,j})$ 为第 i 行和第 j 中像素的梯度向量, 其表达式为

$$\nabla(|\mathbf{A}|_{i,j}) = (D_u |\mathbf{A}|_{i,j}, D_v |\mathbf{A}|_{i,j})。 \quad (23)$$

式中:

$$D_u |\mathbf{A}|_{i,j} = |\mathbf{A}[i+1, j]| - |\mathbf{A}[i, j]|; \quad (24)$$

$$D_v |\mathbf{A}|_{i,j} = |\mathbf{A}[i, j+1]| - |\mathbf{A}[i, j]|。 \quad (25)$$

将 MC 判罚函数和 TV-norm 判罚函数线性组合成一个复合正则化器, 则非凸正则化的 SAR 成像模型式(14)表示为

$$\min_{\mathbf{x}_q} \frac{1}{2} \left\| s_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q \right\|_2^2 + \lambda_1 p_{\text{MC}}(\mathbf{x}_q) + \lambda_2 \text{TV}(|\mathbf{x}_q|)。 \quad (26)$$

在变量分裂方法的指导下, 将无约束问题式(26)转化为以下等价的约束优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_q, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2} & \frac{1}{2} \left\| s_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q \right\|_2^2 + \lambda_1 p_{\text{MC}}(\mathbf{z}_1) + \lambda_2 \text{TV}(|\mathbf{z}_2|) \\ \text{s. t. } & \left\| \mathbf{x}_q - \mathbf{z}_1 \right\|_2^2 = 0, \left\| \mathbf{x}_q - \mathbf{z}_2 \right\|_2^2 = 0。 \end{aligned} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{z}_1$ 和 $\mathbf{z}_2$ 是两个辅助变量。根据拉格朗日乘数法原理, 上述优化问题可由以下公式解决:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}_q, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, l_1, l_2) = & \frac{1}{2} \left\| s_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q \right\|_2^2 + \lambda_1 p_{\text{MC}}(\mathbf{z}_1) + \\ & \lambda_2 \text{TV}(|\mathbf{z}_2|) + l_1 \left\| \mathbf{x}_q - \mathbf{z}_1 \right\|_2^2 + \\ & l_2 \left\| \mathbf{x}_q - \mathbf{z}_2 \right\|_2^2。 \end{aligned} \quad (28)$$

式中: l_1 和 l_2 为拉格朗日乘数。相应最优解表达式为

$$(\mathbf{x}_q^*, \mathbf{z}_1^*, \mathbf{z}_2^*) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_q, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2} L(\mathbf{x}_q, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, l_1, l_2)。 \quad (29)$$

为最小化 $L(\mathbf{x}_q, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, l_1, l_2)$, 对变量 $\mathbf{x}_q, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$

采用交替最小化方法,同时随着迭代逐渐增加拉格朗日乘数 l_1 和 l_2 的值。迭代过程如下:

$$\mathbf{x}_q^{(t+1)} = \underset{\mathbf{x}_q}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 l_i \|\mathbf{x}_q - \mathbf{z}_i^{(t)}\|_2^2, \quad (30)$$

$$\mathbf{z}_1^{(t+1)} = \underset{\mathbf{z}_1}{\operatorname{argmin}} l_1 \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_q^{(t+1)}\|_2^2 + \lambda_1 p_{\text{MC}}(\mathbf{z}_1), \quad (31)$$

$$\mathbf{z}_2^{(t+1)} = \underset{\mathbf{z}_2}{\operatorname{argmin}} l_2 \|\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_q^{(t+1)}\|_2^2 + \lambda_2 \text{TV}(|\mathbf{z}_2|). \quad (32)$$

式(30)中的最小化,由于目标函数是二次的,产生了一个有解的线性方程组:

$$\mathbf{x}_q^{(t+1)} = [\Phi_{\text{RCS}}^H \Phi_{\text{RCS}} + (l_1 + l_2) \mathbf{I}]^{-1} [\Phi_{\text{RCS}}^H \mathbf{s}_q + l_1 \mathbf{z}_1^{(t)} + l_2 \mathbf{z}_2^{(t)}]. \quad (33)$$

式中: $\mathbf{I}$ 是单位矩阵。式(31)的最优解为

$$\mathbf{z}_1^{(t+1)} = \text{threshold}_{\text{MC}}(\mathbf{x}_q^{(t+1)}, \lambda_{\text{MC}}). \quad (34)$$

式中: $\lambda_{\text{MC}} = \lambda_1 / (2l_1)$ 。

采用 Chambolle 算法^[15]对 TV-norm 正则化对偶问题求解从而得到式(32)的解。首先对式进行参数变换,变换后为式(35),等价于标准 TV-norm 正则化问题。

$$\mathbf{z}_2^{(t+1)} = \underset{\mathbf{z}_2}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|\mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_q^{(t+1)}\|_2^2 + \lambda_{\text{TV}} \text{TV}(|\mathbf{z}_2|). \quad (35)$$

式中: $\lambda_{\text{TV}} = \lambda_2 / (2l_2)$ 。上述优化问题解决方案为

$$\mathbf{z}_2^{(t+1)} = \text{sign}(\mathbf{x}_q^{(t+1)}) (|\mathbf{x}_q^{(t+1)}| - \lambda_{\text{TV}} \text{div}(\mathbf{p}^{(t+1)})). \quad (36)$$

式中: $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2) \in Y$ 是 $\mathbf{z}_2 \in X$ 的对偶变量, X 表示为欧几里得空间。因本文图像大小为 $M \times N$,则 X 表示为 $R^{M \times N}$, $Y = X \times X$ 。对 $\mathbf{p}$ 可用梯度下降法^[16]进行求解,过程如下:

$$\mathbf{p}_{i,j}^{(t+1)} = \frac{\mathbf{p}_{i,j}^{(t)} + \tau (\nabla(\text{div} \mathbf{p}^{(t)} - |\mathbf{x}_q^{(t+1)}| / \lambda_{\text{TV}}))_{i,j}}{\max\{1, |\mathbf{p}_{i,j}^{(t)} + \tau (\nabla(\text{div} \mathbf{p}^{(t)} - |\mathbf{x}_q^{(t+1)}| / \lambda_{\text{TV}}))_{i,j}|\}}. \quad (37)$$

式中: τ 表示迭代步长; $\text{div} = -\nabla^*$ 是离散发散算子,即 $\text{div}: Y \rightarrow X$ 。 $\text{div} \mathbf{p}$ 表达式为

$$(\text{div} \mathbf{p})_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{p}_{i,j}^1, & i=1 \\ \mathbf{p}_{i,j}^1 - \mathbf{p}_{i-1,j}^1, & 1 < i < N+1 \\ -\mathbf{p}_{i-1,j}^1, & i=N \\ \mathbf{p}_{i,j}^2, & i=1 \\ \mathbf{p}_{i,j}^2 - \mathbf{p}_{i,j-1}^2, & 1 < i < N \\ -\mathbf{p}_{i,j-1}^2, & i=N \end{cases}. \quad (38)$$

同时,将方向-距离解耦因子也应用到 MC 判罚与全变分的稀疏 SAR 成像模型中。

2.3 基于自适应加权 MC 函数和 TV 的稀疏 SAR 成像

本文将非凸判罚与全变分的正则化模型同加权正则化模型相结合,提出一种自适应加权的极小极大凹罚函数和全变分的稀疏 SAR 成像模型,将非凸正则化的 SAR 成像模型表示为

$$\min_{\mathbf{x}_q} \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q\|_2^2 + \lambda \underbrace{\|\Lambda \odot \mathbf{x}_q\|_{\text{MC}}}_{\varphi(\mathbf{x}_q)}. \quad (39)$$

式中: $\odot$ 是 Khatri-Rao 积,表示逐元素的乘法; $\Lambda \in \mathbb{R}_+^{M \times Q}$ 且 $\Lambda \geq 0$ 。再令 $\varphi(\mathbf{x}_q) = \lambda \|\Lambda \odot \mathbf{x}_q\|_{\text{MC}}$,并对 $\varphi(\mathbf{x}_q)$ 进行如下形式分解:

$$\varphi(\mathbf{x}_q) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^Q \varphi(\mathbf{x}_{q(i,j)}). \quad (40)$$

式中: $\varphi(\mathbf{x}_{q(i,j)})$ 是按式(41)定义的标量加权 MC 函数,

$$\varphi(\mathbf{x}_{q(i,j)}) = \begin{cases} \Lambda_{i,j} \left(|\mathbf{x}_{q(i,j)}| - \frac{|\mathbf{x}_{q(i,j)}|^2}{2\theta} \right), & |\mathbf{x}_{q(i,j)}| \leq \Lambda_{i,j}\theta \\ \frac{\Lambda_{i,j}\theta}{2}, & |\mathbf{x}_{q(i,j)}| \geq \Lambda_{i,j}\theta \end{cases}. \quad (41)$$

标量 MC 函数 $\varphi(\mathbf{x}_q)$ 被表示为模函数与标量 Huber 函数之间的差值,即 $\varphi(\mathbf{x}_q) = |\mathbf{x}_q| - \rho(\mathbf{x}_q)$,其中 $\rho(\mathbf{x}_q)$ 是标量 Huber 函数,表达式为

$$\rho(\mathbf{x}_q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{x}_q^2, & |\mathbf{x}_q| \leq 1 \\ |\mathbf{x}_q| - \frac{1}{2}, & |\mathbf{x}_q| \geq 1 \end{cases}. \quad (42)$$

经过推导与整理,最终标量 MC 函数 $\varphi(\mathbf{x}_q)$ 为

$$\varphi(\mathbf{x}_q) = \min_{\beta \geq 0} \left\{ \beta |\mathbf{x}_q| + \frac{\gamma}{2} (\beta - \lambda) \right\} = \begin{cases} \lambda |\mathbf{x}_q| - \frac{\mathbf{x}_q^2}{2\gamma}, & |\mathbf{x}_q| \leq \lambda\gamma \\ \frac{\lambda^2\gamma}{2}, & |\mathbf{x}_q| \geq \lambda\gamma \end{cases}. \quad (43)$$

式中: $\beta \geq 0$; $\lambda > 0$; $\gamma > 1$ 。根据上述推导,式(39)的优化问题表示为

$$\min_{\mathbf{x}_q, \beta \geq 0, \Lambda \geq 0} \underbrace{\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q\|_2^2 + \|\beta \odot \mathbf{x}_q\|_1 + \frac{\theta}{2} \|\beta - \Lambda\|_2^2}_{\ell(\beta, \mathbf{x}_q, \Lambda)}. \quad (44)$$

基于自适应加权 MC 函数的表达式如式(44)所示,再引入 TV-norm,过程如 2.2 节所示,区别是辅助变量 $\mathbf{z}_1$ 的表达式不同。

$$\mathbf{z}_1^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{z}_1} \frac{l_1}{2} \left\| \mathbf{s}_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q^{(t+1)} \right\|_2^2 + \left\| \boldsymbol{\beta}^{(t+1)} \odot \mathbf{x}_q^{(t+1)} \right\|_1.$$

(45)

本文采用交替最小化方法解决式 (44) 优化问题, 首先对辅助变量 $\boldsymbol{\beta}$ 按式 (46) 进行更新:

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\beta} \geq 0} \ell(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}_q^{(t)}, \Lambda^{(t)}).$$

(46)

进一步,

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \max(\Lambda^{(t)} - \frac{1}{\gamma} |\mathbf{x}_q^{(t)}|, 0).$$

(47)

对 $\mathbf{x}_q$ 进行如下更新:

$$\mathbf{x}_q^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_q} \ell(\boldsymbol{\beta}^{(t+1)}, \mathbf{x}_q, \Lambda^{(t)}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_q} \frac{1}{2} \left\| \mathbf{s}_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q \right\|_2^2 + \left\| \boldsymbol{\beta}^{(t+1)} \odot \mathbf{x}_q \right\|_1.$$

(48)

则式 (48) 所示优化问题可以采用快速软阈值迭代算法 (Fast Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm, FISTA)^[17] 来求解。之后, 对 Λ 进行更新:

$$\Lambda^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\Lambda \geq 0} \ell(\Lambda, \boldsymbol{\beta}^{(t+1)}, \mathbf{x}_q^{(t+1)}) = \operatorname{argmin}_{\Lambda} \frac{\gamma}{2} \left\| \boldsymbol{\beta}^{(t+1)} - \Lambda \right\|_2^2 = \boldsymbol{\beta}^{(t+1)}.$$

(49)

综上, 基于自适应加权的极小极大凹罚函数和全变分的算法伪代码如下:

输入: 回波数据 $\mathbf{s}_q$, 初始解 $\mathbf{x}_q^{(0)} = 0, \mathbf{z}_1^{(0)} = 0, \mathbf{z}_2^{(0)} = 0, \Lambda^{(0)} = 0$, 初始对偶变量 $\mathbf{p} = (0, 0)$, 方位-距离解耦算子 $\mathcal{G}(\cdot)$ 和 $\mathcal{I}(\cdot)$, 误差参数 ε , 外部迭代次数 T , 内部迭代次数 J , 非零元素个数 K , $|\cdot|_{K+1}$ 表示将图像按照幅值从大到小进行排序, 取 $K+1$ 个幅值作为阈值, 图像大小 N , 噪声变量 ξ 。

- 1 当 $\text{res} > \varepsilon$ 且 $t < T$ 时执行循环
- 2 $\mathbf{x}_q^{(t+1)} = [\mathcal{I}(\mathcal{G}(\mathbf{I})) + (l_1 + l_2)\mathbf{I}]^{-1} [\mathcal{I}(\mathbf{s}_q) + l_1 \mathbf{z}_1^{(t)} + l_2 \mathbf{z}_2^{(t)}]$
- 3 $\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \max\left(\Lambda^{(t)} - \frac{1}{\gamma} |\mathbf{x}_q^{(t)}|, 0\right)$
- 4 $\mathbf{z}_1^{(t+1)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{z}_q} \frac{l_1}{2} \left\| \mathbf{s}_q - \Phi_{\text{RCS}} \mathbf{x}_q^{(t+1)} \right\|_2^2 + \left\| \boldsymbol{\beta}^{(t+1)} \odot \mathbf{x}_q^{(t+1)} \right\|_1$
- 5 $\Lambda^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t+1)}$
- 6 $\lambda_2^{(t+1)} = \lambda_2^{(t)} \frac{N\xi}{\left\| \mathbf{z}_2^{(t)} - \mathbf{x}_q^{(t+1)} \right\|_2}$
- 7 $\lambda_{\text{TV}}^{(t+1)} = \frac{\lambda_2^{(t+1)}}{2l_2}$
- 8 $\mathbf{p}_{i,j}^{(t+1)} = (\mathbf{p}_{i,j}^1, \mathbf{p}_{i,j}^2)^{(t+1)} = \frac{\mathbf{p}_{i,j}^{(t)} + \tau(\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}^{(t)} - |\mathbf{x}_q^{(t+1)}|/\lambda_{\text{TV}}))_{i,j}}{\max\{1, |\mathbf{p}_{i,j}^{(t)} + \tau(\nabla(\operatorname{div} \mathbf{p}^{(t)} - |\mathbf{x}_q^{(t+1)}|/\lambda_{\text{TV}}))_{i,j}|\}}$
- 9 $\mathbf{z}_2^{(t+1)} = \mathbf{x}_q^{(t+1)} - \lambda_{\text{TV}} \operatorname{div}(\mathbf{p}^{(t+1)})$
- 10 $\text{res} = \left\| \mathbf{x}_q^{(t+1)} - \mathbf{x}_q^{(t)} \right\|_2 / \left\| \mathbf{x}_q^{(t)} \right\|_2$
- 11 $t = t + 1$
- 12 结束循环
- 输出 $\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_q^{(t+1)}$

3 仿真与实测数据结果与分析

为综合比较分析本文方法的性能及其工程实用性, 将 L_1 正则化算法、BCS 算法、MC 算法、MC-TV 算法与本文算法 (AWMC-TV) 作为对比, 同时采用相对均方根误差 (Relative Root Mean Square Error, RRMSE)^[7]、目标杂波比 (Target Clutter Ratio, TCR)^[18] 和图像熵 (Image Entropy, IE)^[18] 来定量评价成像质量。

3.1 目标二维成像仿真实验分析

为充分验证算法性能, 对 23 个点目标仿真产生的数据进行二维成像仿真实验, 仿真参数设置如表 1 所示。目标散射点模型如图 3 所示。将图 4 中 RD 算法的成像图作为真实值, 对本文成像算法性能进行评价。为便于分析, 将距离向采样率与方位向采样率同时设为原采样率的 1/2。仿真结果如图 5 所示, 可见除基于 L_1 算法成像结果中有少量假目标点外, 其余算法均可清晰实现目标点 SAR 成像。

表 1 雷达仿真参数

参数	数值
雷达信号载频/GHz	3
雷达信号带宽/MHz	150
采样频率/MHz	300
雷达距目标区域中心点/m	4 200
观测场景长度/m	200
飞机平台速度/(m/s)	150
平台飞行高度/m	4 000
天线孔径长度/m	2
快时间过采样率	1.2
慢时间过采样率	1.25

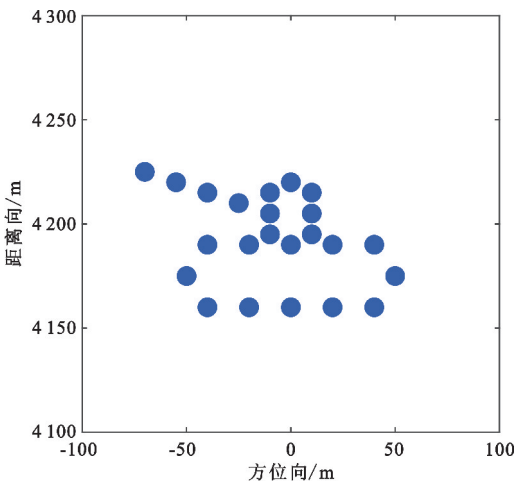


图 3 目标散射点模型

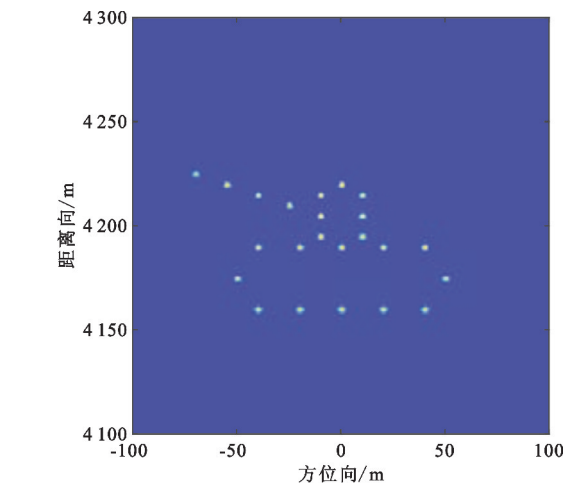


图 4 RD 算法 SAR 图像

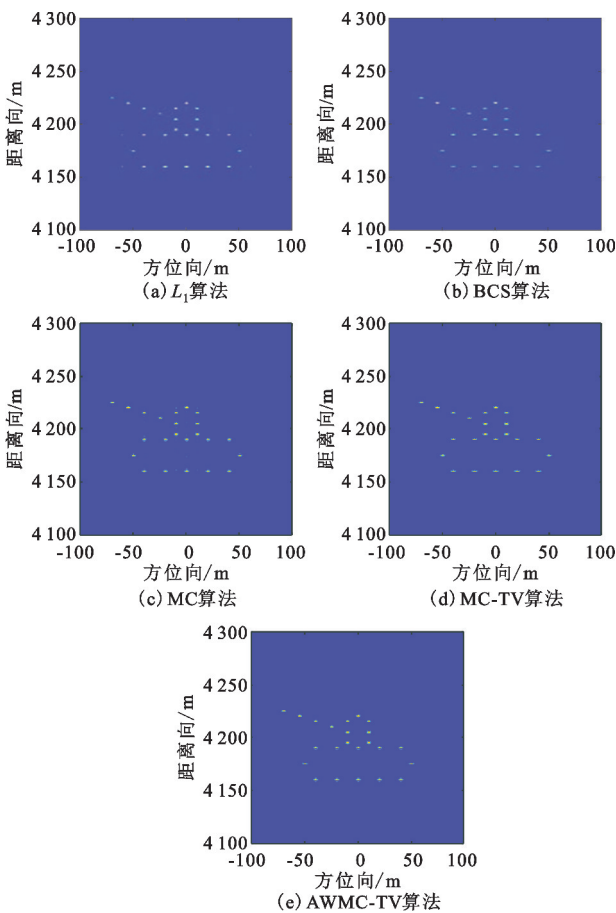


图 5 各种算法二维成像结果

为进一步比较上述算法的成像质量,利用目标杂波比和图像熵对成像质量进行定量评价。表 2 给出了在采样率为原采样率 1/2 时几种算法的 TCR 和 IE 值,显然基于 AWMC-TV 算法的图像 TCR 值大于其他算法,IE 值小于其他算法,相比于其他算法有更好的聚焦性能和重建精度。

表 2 目标的成像结果评价参数

算法	TCR	IE
L_1 -norm	19.987 9	6.923 1
BCS	22.217 9	5.970 2
MC	22.330 1	6.093 6
MC-TV	25.527 4	5.957 5
AWMC-TV	26.817 0	5.846 2

采用相对均方根误差作为评估标准,反应重建图像中每个散射点的信号强度与真实值间误差,该值越小说明重建效果越好。表 3 显示了本文算法相比其他算法 RRMSE 较小,重构效果更好。

表 3 几种算法 RRMSE

方法	RRMSE
L_1 -norm	0.027 1
BCS	0.026 2
MC	0.026 0
MC-TV	0.024 3
AWMC-TV	0.020 5

分别对各算法进行计算复杂度对比,如表 4 所示。表 4 中, K_1 和 K_2 分别表示各算法的循环迭代次数, T_i 和 $J_i(i=1,2,3)$ 分别表示各算法的外部 and 内部迭代次数。

表 4 各类算法的计算复杂度比较

算法	计算复杂度
L_1 -norm	$O(M^2(2P+1)K_1)$
BCS	$O((M^3+MP)K_2)$
MC	$O(((MP+M^2P)J_1+M^2)T_1)$
MC-TV	$O((2M^2J_2+M^2(M+P))T_2)$
AWMC-TV	$O(((2M^2+MP)J_3+M^2(M+P))T_3)$

综上,在相同的实验条件下,相比其他几种算法,本文算法虽然复杂度有所增加,但目标的重建精度显著提高,表明该方法在 SAR 成像领域具有一定的潜力和优势。

3.2 实测数据处理

为充分验证本文算法在实际应用中的有效性,采用加拿大温哥华的 RADARSAT-1 精细模式 2 (加拿大航天局版权所有) 的实测数据进行实验,参数设置如表 5 所示。图 6(a) 为基于 RD 算法的英国湾附近温哥华地区的实际场景,选取红色矩形区域内的 6 个目标点(6 艘货船)进行实验。这 6 个目标点相比海平面是强散射点,相比英吉利海湾是稀疏的。图 6(b)~(f) 为几种算法在距离采样率为原采样率的 30%、方位采样率为原采样率 20% 的成像结

果。显然,在低采样率情况下,AWMC-TV 算法依然能够准确重建目标。

表 5 温哥华场景 RADARSAT-1 参数	
参数	数值
距离带宽/MHz	30.3
距离向采样频率/MHz	32.317
脉冲宽度/MHz	30.111
雷达波长/m	0.056 57
雷达速率(m/s)	7 062
距离调频率(MHz/ μ s)	0.721 35
雷达频率/GHz	5.3

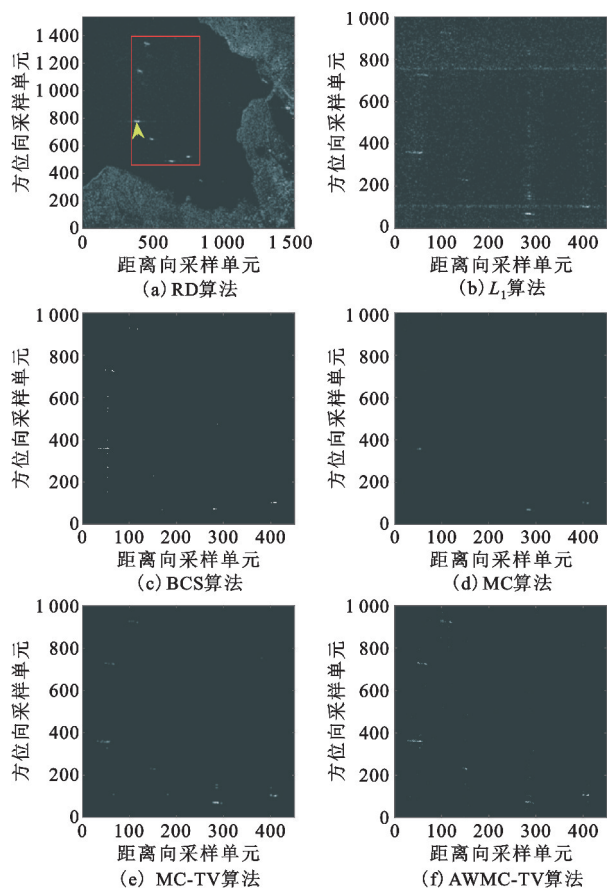


图 6 各算法成像结果

为比较几种算法在有噪声的真实情况下的性能,对图 6(a)红框中绿色标记的点目标沿距离向进行切片,计算该点目标幅值在所在距离单元内的比值。表 6 给出了该目标点振幅在各算法下占该距离单元内的百分比,可见 AWMC-TV 算法下目标点幅值在该距离向上占比最大,表明 AWMC-TV 算法能够消除图像中的模糊和拖尾,在重建性能和抗噪性能上具有优越性。

表 6 目标点幅度在该距离单元内占比	
算法	幅值占比
L_1 -norm	0.047 4
BCS	0.104 8
MC	0.105 6
MC-TV	0.230 2
AWMC-TV	0.262 0

4 结束语

针对 L_1 正则化存在的偏差效应及传统压缩感知重构算法重构精度低的问题,本文将隶属于非凸函数簇中的极小极大凹罚函数应用到 SAR 成像中,同时将非凸正则化与全变分判罚线性组合作为成像模型的复合正则化器,提出一种基于自适应加权的极小极大凹罚函数和全变分的稀疏 SAR 成像算法,并采用 FISTA 算法与交替最小化算法求解该模型。仿真与实测数据成像结果验证了该算法的有效性,在抗噪性能及重构精度等方面比其他算法更具优势。

由于本文中压缩感知模型只考虑到噪声的影响,因此后续还需研究杂波对算法的影响。此外,能否通过多种变换找到复杂场景的稀疏表示是压缩感知理论进一步在 SAR 成像领域应用的关键,这也是下一步研究的内容。

参考文献:

[1] 谢矿生. 基于回波数据压缩的 MIMO-SAR 成像方法 [J]. 电讯技术,2015,55(3):233-237.

[2] XIAO P,LIU B,GUO W. ConGaLSAR;a constellation of geostationary and low Earth orbit synthetic aperture radar [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2020,17(12):2085-2089.

[3] 石翠萍,刘欢欢. 基于块稀疏度与自适应迭代的压缩感知方法[J]. 电讯技术,2020,60(2):216-221.

[4] 徐建平,皮亦鸣,曹宗杰. 基于贝叶斯压缩感知的合成孔径雷达高分辨成像 [J]. 电子与信息学报,2011,33(12):2863-2868.

[5] PATEL V M, EASLEY G R, HEALY D M, et al. Compressed synthetic aperture radar[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing,2010,4(2):244-254.

[6] SELESNICK I. Sparse regularization via convex analysis [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65 (17):4481-4494.

[7] FAN J Q, LI R Z. Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties [J]. Publications of the American Statistical Association,

2001,96(456):1348-1360.

[8] WEN F,CHU L,LIU P L,et al. A survey on nonconvex regularization-based sparse and low-rank recovery in signal processing, statistics, and machine learning [J]. IEEE Access,2018,6:69883-69906.

[9] 李博,刘发林,周崇彬,等. 基于近似观测的加权 L_1 压缩感知 SAR 成像 [J]. 微波学报,2018,34(6):62-67.

[10] GÜVEN H E, GÜNGÖR A, CETİN M. An augmented lagrangian method for complex-valued compressed SAR imaging [J]. IEEE Transactions on Computational Imaging,2016,2(3):235-250.

[11] XU Z Q,LIU M Q,ZHOU G R,et al. An accurate sparse SAR imaging method for enhancing region-based features via nonconvex and TV regularization [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing,2020,14:350-363.

[12] GONG P H, ZHANG C S, LU Z S, et al. A general iterative shrinkage and thresholding algorithm for non-convex regularized optimization problems [C]// Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning. Atlanta:IEEE,2013:37-45.

[13] WEI Z H,ZHANG B C,XU Z L,et al. An improved SAR imaging method based on nonconvex regularization and convex optimization [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters,2019,16(10):1580-1584.

[14] FANG J,XU Z B,ZHANG B C,et al. Fast compressed sensing SAR imaging based on approximated observation [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing,2014,7(1):352-363.

[15] CHAMBOLLE A. An algorithm for total variation minimization and applications; special issue on mathematics and image analysis [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision,2004,20(1):89-97.

[16] CHAMBOLLE A. Total variation minimization and a class of binary MRF models [C]//Proceedings of the 5th International Conference on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, St. Augustine:Springer,2005:136-152.

[17] QIU W, ZHOU J, FU Q. Jointly using low-rank and sparsity priors for sparse inverse synthetic aperture radar imaging [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020,29(1):100-115.

[18] 徐楚,朱栋强,汪玲,等. 基于零空间 L_1 范数最小化的 ISAR 成像方法 [J]. 系统工程与电子技术,2020,42(2):315-321.

作者简介:

李家强 男,1976 年生于安徽滁州,2007 年获博士学位,现为副教授,主要研究方向为雷达信号处理。

胡张燕 女,1997 年生于安徽池州,2019 年获学士学位,现为硕士研究生,主要研究方向为雷达信号处理。

姚昌华 男,1982 年生于重庆,2016 年获工学博士学位,现为教授,主要研究方向为无人集群优化、无线网络、网络安全、数据分析和人工智能。

郭桂祥 男,1996 年生于山东聊城,2019 年获学士学位,现为硕士研究生,主要研究方向为雷达信号处理。

陈金立 男,1982 年生于浙江宁波,2010 年获博士学位,现为副教授,主要研究方向为 MIMO 雷达信号处理。