

doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2022.10.018

引用格式:许梦楠,吴雅婷,施文明,等. BEC 上基于内插算法的多元 SC-LDPC 码 BP 译码波速度分析[J]. 电讯技术,2022,62(10):1498-1505.  
[XU Mengnan, WU Yating, SHI Wenming, et al. BP decoding waves velocity analysis of non-binary SC-LDPC code based on interpolation approach on BEC[J]. Telecommunication Engineering, 2022, 62(10):1498-1505.]

## BEC 上基于内插算法的多元 SC-LDPC 码 BP 译码波速度分析\*

许梦楠<sup>a,b,c</sup>, 吴雅婷<sup>a,b,c</sup>, 施文明<sup>a,b,c</sup>, 张钟浩<sup>a,b,c</sup>

(上海大学 a. 上海先进通信与数据科学研究院; b. 特种光纤与光接入网重点实验室;  
c. 特种光纤与先进通信国际合作联合实验室, 上海 200444)

**摘要:**针对多元空间耦合低密度奇偶校验 (Spatially-Coupled Low-Density Parity-Check, SC-LDPC) 码在二进制擦除信道 (Binary Erasure Channel, BEC) 上置信传播 (Belief Propagation, BP) 译码的译码波速度分析复杂度较高的问题,提出了内插密度演进 (Density Evolution, DE) 算法。内插 DE 算法利用一维函数在非耦合 DE 递归式的不动点间插值密度来近似表示轮廓译码 (Decoding Profile, DP), 避免了高维耦合 DE 递归式的迭代,从而降低了计算复杂度。仿真和分析结果表明,在相同的度分布和信道条件下,内插 DE 算法计算的译码波速度与传统的耦合 DE 算法计算的译码波速度误差在  $[0, 0.05]$ , 特别在信道删除概率为耦合 DE 算法的 BP 阈值时,两者测得速度相等;由内插 DE 算法计算所得的 BP 阈值与耦合 DE 算法的 BP 阈值相等。

**关键词:**空间耦合低密度奇偶校验码;置信传播译码波速度;密度演进;计算复杂度

开放科学 (资源服务) 标识码 (OSID):



中图分类号:TN911.22 文献标志码:A 文章编号:1001-893X(2022)10-1498-08

## BP Decoding Waves Velocity Analysis of Non-binary SC-LDPC Code Based on Interpolation Approach on BEC

XU Mengnan<sup>a,b,c</sup>, WU Yating<sup>a,b,c</sup>, SHI Wenming<sup>a,b,c</sup>, ZHANG Zhonghao<sup>a,b,c</sup>

(a. Shanghai Institute for Advanced Communication and Data Science; b. Key Laboratory of Specialty Fiber Optics and Optical Access Networks; c. Joint International Research Laboratory of Specialty Fiber Optics and Advanced Communication, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** In order to reduce the computational complexity in analyzing the decoding wave velocities of non-binary spatially-coupled low-density parity-check (SC-LDPC) codes on binary erasure channel (BEC) under belief propagation (BP) decoding, an interpolated density evolution (DE) approach is proposed. The approach uses one-dimensional functions to interpolate density between some fixed points (FPs) of the uncoupled DE recursion to approximate the decoding profile (DP), which avoids the iteration of high-dimensional DE recursions and reduces the computational complexity. Simulation and analysis results show that the error between the decoding wave velocities calculated by the interpolated DE approach and that calculated by traditional coupled DE approach is between 0 and 0.05, especially when the channel erasure probability is equal to the BP threshold of the coupled DE approach, the velocities calculated by the interpolated DE approach and the coupled DE approach are equal. The BP threshold of the interpolated DE approach is equal to that of coupled DE approach.

**Key words:** spatially-coupled low-density parity-check (SC-LDPC) code; BP decoding wave velocity; density evolution; computational complexity

\* 收稿日期:2021-06-15;修回日期:2021-09-13  
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61701294)  
通信作者:吴雅婷

## 0 引言

空间耦合低密度奇偶校验 (Spatially-Coupled Low-Density Parity-Check, SC-LDPC) 码<sup>[1]</sup>在置信传播 (Belief Propagation, BP) 译码<sup>[2]</sup>下具有比底层码更优异的性能<sup>[3]</sup>。SC-LDPC 码的消息在耦合链的两端产生,随着迭代次数的增加,消息沿着耦合链向中间传播,这就是 SC-LDPC 码的译码波传播<sup>[4]</sup>。多元 LDPC 码定义在有限域  $GF(2^m)$  上,  $m$  表示每符号含有的比特数<sup>[5]</sup>。SC-LDPC 码相比 LDPC 码存在阈值饱和现象,即 BP 阈值饱和于最大后验 (Maximum A Posteriori, MAP) 阈值<sup>[6-7]</sup>。已经证明二元 SC-LDPC 码在二进制擦除信道 (Binary Erasure Channel, BEC) 上存在阈值饱和现象<sup>[8]</sup>。对于多元 SC-LDPC 码,可以借助势函数证明在 BEC 上阈值饱和<sup>[9]</sup>。

近些年来,译码波的速度分析引起了人们的广泛关注:文献[8]指出译码波速度会随着迭代次数的增加而收敛;文献[10]利用度分布和非耦合密度演进 (Density Evolution, DE) 递归式的不动点 (Fixed Point, FP) 可以计算译码波速度的临界点;文献[11]推导了译码波速度的表达式并推广到一般的空间耦合系统;文献[12]提出了插值密度演进算法,利用此算法分析了二进制无记忆对称信道 (Binary Memoryless Symmetric Channel, BMSC) 上二元 SC-LDPC 码译码波的速度。

本文运用内插密度演进 (Density Evolution, DE) 算法分析多元 SC-LDPC 码在 BEC 上 BP 译码波速度。通过观察译码波的密度演进发现,轮廓译码 (Decoding Profile, DP) 可以看作一条通过非耦合 DE 递归式的不动点的路径。受此启发,可以利用一维内插函数在非耦合 DE 递归式的 FP 间插值密度来近似表示 DP,这样避免利用耦合 DE 递归式从而降低计算复杂度。在更新内插函数时,将变量节点 (Variable Node, VN) 和校验节点 (Check Node, CN) 间的转移函数进一步简化来降低计算复杂度。仿真和分析结果表明,在相同的度分布和信道条件下,与耦合 DE 算法相比,本文提出的内插 DE 算法在取得很好的性能同时降低了计算的复杂度。

## 1 耦合 DE 算法

### 1.1 符号和定义

多元 LDPC 码定义在有限域  $GF(2^m)$  上,  $m$  表示每符号含有的比特数<sup>[4]</sup>,其中  $\lambda$  和  $\rho$  分别表示变量

节点和校验节点的边度分布。

多元 SC-LDPC( $\lambda, \rho, m, L, w$ ) 码,其中  $L$  和  $w$  分别表示耦合长度和宽度。SC-LDPC 码的构造:首先将单个 LDPC 码的原模图复制  $L$  相同的副本,放置在位置  $\{1, 2, \dots, L\}$ ,用整数  $k$  表示位置的索引;然后在位置  $k$  处,将变量节点的边均匀随机地分成  $w$  组,依次与位置为  $\{k, k+1, \dots, k+w-1\}$  的校验节点相连;同样地,将位置  $k$  处的校验节点的边均匀随机地分成  $w$  组,依次与位置为  $\{k-w+1, k-w+2, \dots, k\}$  的变量节点相连。

图 1 给出了耦合宽度  $w$  为 3 的 SC-LDPC 码的原模图构造过程。SC-LDPC 码的结构导致了 BP 译码算法中译码波由耦合链的两端产生然后向中间传播。

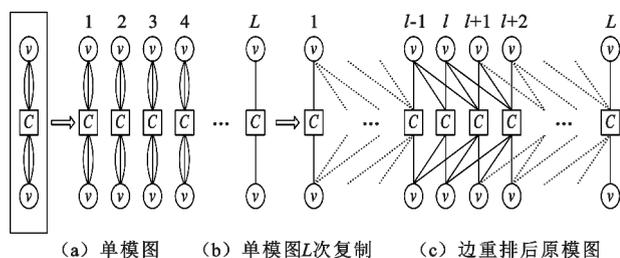


图 1 SC-LDPC 码原模图构造过程

### 1.2 BP 译码算法中消息密度

将在 BEC 上传输的消息分布称为密度,本文分析 BP 译码算法中多元 SC-LDPC 码的密度演进 (Density Evolution, DE)。在 BP 译码算法中 VN 和 CN 间交换的消息是非负向量  $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_i)$ ,其中  $r_i$  表示码字符号  $x$  为  $x_i$  的后验概率。例如  $m=2$ ,有四种可能的码字符号,即  $x_0=00, x_1=01, x_2=10, x_3=11$ ,消息  $\mathbf{r} = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$  表示  $P(x=00)$ 、 $P(x=01)$ 、 $P(x=10)$  和  $P(x=11)$  都为 0.25。在 BP 译码算法中跟踪密度很困难,因为每个码字符号有  $2^m$  种可能值。幸运的是,在 BEC 上, BP 译码性能不依赖具体的传输码字,因此假如全为零的码字传输。这样在 BEC 上,消息等价于  $GF(2^m)$  的一个子空间。跟踪密度转化为跟踪消息的维数。消息维数为  $k$  指的是有  $2^k$  非零元素。基于此,密度演进简化为长度为  $m+1$  的消息交换。例如  $m=3, m+1$  维的消息向量  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_m) = (1, 0, 0, 0), 0 \leq i \leq m, i=0, a_0=1$  指消息维度为 0 的概率为 1,也就是消息译码发生 0 比特翻转的概率为 1;同理,  $i=m, a_m=0$  指消息维度为  $m$  的概率为 0,也就是消息译码发生  $m$  比特翻转的概率为 0,表明码字符

号可以无错地从传输的消息中译码。

**定义 1** BEC 上 BP 译码算法中多元 SC-LDPC 码的消息密度为长度为  $m+1$  的概率向量。定义密度集合

$$\mathcal{X} = \{a = (a_0, a_1, \dots, a_m) \mid \sum_{k=0}^m a_k = 1, a_k \in [0, 1], k \in \{0, 1, \dots, m\}\}, \quad (1)$$

其中有两个极限密度,  $\Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$  表示码字符号可以无错地从传输的消息中译码,  $\Delta_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$  表示传输的消息没有为译码提供任何信息。

### 1.3 熵函数

**定义 2** 对于任意的  $a \in \mathcal{X}, a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ , 熵函数定义为

$$H(a) = \sum_{k=0}^m ka_k. \quad (2)$$

用熵函数来衡量消息的平均不确定度。

### 1.4 多元 LDPC $(\lambda, \rho, m)$

本文用卷积运算符  $\boxtimes$  和  $\boxdot$  表示 VN 和 CN 的卷积运算。

**定义 3** 两个维度为  $m+1$  的概率向量  $a$  和  $b$ ,

$$[a \boxdot b]_k \triangleq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m V_{i,j,k}^m a_i b_j, \quad (3)$$

$$[a \boxtimes b]_k \triangleq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m C_{i,j,k}^m a_i b_j, \quad (4)$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, m\},$$

$$V_{i,j,k}^m = \frac{G_{i,k} G_{m-i,j-k} 2^{(i-k)(j-k)}}{G_{m,j}}, \quad (5)$$

$$C_{i,j,k}^m = \frac{G_{m-i,m-k} G_{i,k-j} 2^{(k-i)(k-j)}}{G_{m,m-j}}. \quad (6)$$

高斯二项式系数

$$G_{m,k} = \binom{m}{k} = \begin{cases} 1, & k=0 \text{ 或 } k=m \\ \prod_{l=0}^{k-1} \frac{2^m - 2^l}{2^k - 2^l}, & 0 < k < m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (7)$$

**定义**  $a^{\boxtimes n} = \overbrace{a \boxtimes a \boxtimes \dots \boxtimes a}^{n \uparrow a}$  和  $a^{\boxdot n} = \overbrace{a \boxdot a \boxdot \dots \boxdot a}^{n \uparrow a}$ , 特别地,  $a^{\boxtimes 1} = a, a^{\boxtimes 0} = \Delta_0, a^{\boxdot 1} = a, a^{\boxdot 0} = \Delta_m$ 。  $V_{i,j,k}^m$  和  $C_{i,j,k}^m$  的意义: 假设  $GF(2^m)$  的两个维度为  $i$  和  $j$  的子空间,  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ,  $V_{i,j,k}^m$  表示两个子空间的交集维度为  $k$  的概率,  $C_{i,j,k}^m$  表示两个子空间的并集维度为  $k$  的概率。

多元 LDPC  $(\lambda, \rho, m)$  在删除概率为  $\varepsilon$  的 BEC 上传输时,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , 令长度为  $m+1$  的概率向量  $x^{(l)} \triangleq (x_0^{(l)}, x_1^{(l)}, \dots, x_m^{(l)})$ ,  $y^{(l)} \triangleq (y_0^{(l)}, y_1^{(l)}, \dots, y_m^{(l)})$ ,

$p(\varepsilon) \triangleq (p_0(\varepsilon), p_1(\varepsilon), \dots, p_m(\varepsilon))$ , 其中,  $x_k^{(l)}$  表示在  $l$  轮迭代时 VN 向 CN 传递的消息的维度为  $k$  的概率,  $y_k^{(l)}$  表示在  $l$  轮迭代时 CN 向 VN 传递的消息的维度为  $k$  的概率,  $p_k(\varepsilon)$  表示信道消息维度为  $k$  的概率,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ 。

**定义 4** 多元 LDPC  $(\lambda, \rho, m)$  在删除概率为  $\varepsilon$  的 BEC 上传输, 第  $l$  轮迭代的非耦合 DE 递归式为

$$\begin{cases} y^{(l)} = \rho^{\boxtimes} (x^{(l-1)}) \\ x^{(l)} = p(\varepsilon) \boxdot \lambda^{\boxdot} (y^{(l)}) \end{cases}, \quad (8)$$

$$x^{(l)} = p(\varepsilon) \boxdot \lambda^{\boxdot} (\rho^{\boxtimes} (\boxtimes x^{(l-1)})), \forall l > 0. \quad (9)$$

式中:

$$\lambda^{\boxdot} (a) = \sum_i \lambda_i a^{\boxdot i-1}, \quad (10)$$

$$\rho^{\boxtimes} (b) = \sum_j \rho_j b^{\boxtimes j-1}. \quad (11)$$

信道密度

$$p_k(\varepsilon) \triangleq \binom{m}{k} \varepsilon^k (1-\varepsilon)^{m-k}, k \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (12)$$

特别地, 当  $x^{(\infty)} = (1, 0, \dots, 0)$ , 表明成功译码。

**定义 5** 非耦合 DE 递归式(9)的不动点指的是密度对  $(x, y)$  满足  $y = \rho^{\boxtimes}(x), x = p(\varepsilon) \boxdot \lambda^{\boxdot}(y)$ 。

对每个 FP, 总存在一个初始密度  $x^{(0)}$ , 使非耦合 DE 递归式(9)收敛于这个 FP。只要给定初始密度  $x^{(0)}$  和信道密度  $p(\varepsilon)$ , 运行非耦合 DE 递归式(9)就可得到 FP。用  $(x, y) = T_{\text{非耦合 DE}}(x^{(0)}, p(\varepsilon))$  表示 FP。

**定义 6**  $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, 0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq 1$ , 对非耦合 DE 递归式(9)的 FP 进行扰动擦除初始化:

$$\begin{aligned} (x, y) &= T_{\text{非耦合 DE}}(\varepsilon \Delta_m + (1-\varepsilon) \Delta_0, p(\varepsilon)), \\ &\forall \varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

用  $S = \{(x_i, y_i)\}, i \in I_s$  表示经过扰动擦除初始化的 FP 的集合,  $I_s = \{0, 1, \dots, N_s - 1\}$ 。经过扰动擦除初始化的 FP 是严格按照退化排列。分析发现, 多元 SC-LDPC 码的译码波动态特性可以用非耦合 DE 递归式的稳定的 FP 来表征。本文提出的内插 DE 算法中, 若 FP 按照严格的退化排列, 则 DP 也具有单调性, 所以本文提到的 FP 都是经过扰动擦除初始化的 FP。

### 1.5 多元 SC-LDPC $(\lambda, \rho, m, L, w)$ 的耦合 DE 算法

**定义 7** 多元 SC-LDPC  $(\lambda, \rho, m, L, w)$  在删除概率  $\varepsilon$  的 BEC 上传输, 第  $l$  轮迭代的耦合 DE 递归式为

$$\begin{cases} \bar{y}_i^{(l)} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{w-1} \rho^{\boxtimes} (x_{i+k}^{(l-1)}) \\ \bar{x}_i^{(l)} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{w-1} p(\varepsilon_{i-k}) \boxdot \lambda^{\boxdot} (\bar{y}_{i-k}^{(l)}) \end{cases}, \quad (14)$$

$$\underline{x}_i^{(l)} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{w-1} p(\varepsilon_{i-k}) \square \lambda \square \left( \frac{1}{w} \sum_{j=0}^{w-1} \rho \square (x_{i-k+j}^{(l-1)}) \right), \quad (15)$$

$$1 \leq i \leq L+w-1,$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon, & 1 \leq i \leq L \\ 0, & L+1 \leq i \leq L+w-1 \end{cases} \quad (16)$$

式(14)和(15)中:  $\underline{x}^{(l)}$ 、 $\underline{y}^{(l)}$ 、 $\underline{x}_i^{(l)}$  和  $\underline{y}_i^{(l)}$  分别表示第  $l$  轮迭代 VN 和 CN 的密度序列、第  $l$  轮迭代位置  $i$  处的 VN 和 CN 的密度。

本文考虑  $L \rightarrow \infty$  和  $w \rightarrow \infty$  连续条件下情形, 对应的 Tanner 图, 底层集成沿着耦合链以连续的方式放置, 位置索引为连续的变量  $t \in R \cup \{\pm\infty\}$ 。位置  $t$  处的变量节点的边均匀随机地连接到位置为  $[t, t+1]$  的校验节点; 同样地, 位置  $t$  处的校验节点的边均匀随机地连接到位置为  $(t-1, t]$  的变量节点。令  $t = i/w$ , 式(14)转化为式(17):

$$\begin{cases} \underline{x}^{(l)}(t) = \int_0^1 \tilde{x}^{(l-1)}(t-s) ds \\ \tilde{y}^{(l)}(t) = \rho \square (\underline{x}^{(l)}(t)) \\ \underline{y}^{(l)}(t) = \int_0^1 \tilde{y}^{(l)}(t+s) ds \\ \tilde{x}^{(l)}(t) = p(\varepsilon_i) \square \lambda \square (\underline{y}^{(l)}(t)) \end{cases} \quad (17)$$

**定义 8** 连续条件下, 第  $l$  轮迭代的耦合 DE 递归式如(17)所示。  $\underline{x}^{(l)}(t)$ 、 $\underline{y}^{(l)}(t)$ 、 $\tilde{x}^{(l)}(t)$  和  $\tilde{y}^{(l)}(t)$  分别表示校验节点的输入密度、变量节点的输入密度、变量节点的输出密度和校验节点的输出密度, 其中将  $\tilde{x}^{(l)}(t)$  和  $\tilde{y}^{(l)}(t)$  称作译码轮廓。

**定义 9** 将 DP 初始化:

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{cases} x_0, & t < 0 \\ x_{N_s-1}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

这样有

$$\underline{x}^{(l)}(t_1) < \underline{x}^{(l)}(t_2), \quad 1 \leq t_1 < t_2 \leq L. \quad (19)$$

## 2 非耦合 DE 递归式 FP 和 DP

DP 可以看作是沿着耦合链包含 FP 的密度路径。FP 将 DP 分成一个或多个过渡区间, 每个过渡区间有着自己的移动速度。下面重点讨论 DP 的动态特性并为内插 DE 算法的提出创造条件。

**定义 10** 密度  $x$  与 DP  $\underline{x}^{(l)}$  间的距离

$$d(\underline{x}^{(l)}, x) = \min_{t \in [-L, L]} \int_0^1 d(\underline{x}^{(l)}(t+s), x) ds. \quad (20)$$

若  $\lim_{l \rightarrow \infty} d(\underline{x}^{(l)}, x) = 0$ , 称 DP  $\underline{x}^{(l)}$  经过密度  $x$ , 否则称 DP  $\underline{x}^{(l)}$  跳过密度  $x$ 。

**定义 11** 对非耦合 DE 递归式(9)的一个 FP  $(x, y)$ , 如果 DP  $\underline{x}^{(l)}$  经过  $x$ , 称  $x$  是一个非跳动 FP, 否则称为跳动 FP。

令  $P = \{(x_i, y_i)\}, i \in I_p (I_p = \{0, 1, \dots, N_p-1\})$  表示非跳动 FP 的集合, 发现 DP  $\underline{x}^{(l)}$  总是经过 FP 的集合  $S$  中的第一个 FP  $x_0$  和最后一个 FP  $x_{N_s-1}$ 。

若 FP 保持退化排列, 那么 DP 具有单调特性。假设在迭代  $l_1$  次时, DP  $\underline{x}^{(l)}$  经过密度  $x_0$  和  $x_1, x_0 < x_1$ , 由 DP  $\underline{x}^{(l)}$  的单调性可知,  $x_0$  在  $x_1$  的左边, 在迭代  $l_2$  次后,  $l_1 < l_2$ , DP  $\underline{x}^{(l)}$  仍然会经过  $x_0$  和  $x_1$ , 但是位置不同于  $l_1$  次迭代。

**定义 12** 已知 DP  $\underline{x}^{(l)}$  和密度  $x$ , 定义位置  $\tau(x, l)$  表示第  $l$  轮迭代该位置处  $\underline{x}^{(l)}$  和  $x$  间的距离最小。对于两个不同的密度  $x_0$  和  $x_1, x_0 < x_1$ , 定义过渡区间  $\tau(x_0, l) \leq t \leq \tau(x_1, l)$ , 其中  $x_0$  和  $x_1$  分别作为过渡区间的起始点和终点。本文讨论简单情况, 假设  $x_0$  是无错密度, 即  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $x_1$  是相邻的有错的非跳动 FP。

**假设 1:** 非耦合 DE 递归式(9)的非跳动 FP 集合  $P = \{(x_i, y_i)\}, i \in I_p = \{0, 1, \dots, N_p-1\}$ , 将 DP  $\underline{x}^{(l)}$  分成  $N_p-1$  过渡区间  $\tau_i = \tau(x_{i-1}, x_i, l), i \in \{1, 2, \dots, N_p-1\}$ 。本文讨论具有一个过渡区间  $\tau_1$  的 DP, 过渡区间  $\tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$  位于两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间,  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ , 过渡区间  $\tau_1$  的形状经过  $lv_1$  的位移后收敛于 DP  $\underline{x}_{\text{sol},1}(t)$ ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{\tau(x_0, x_1, l) \leq t \leq \tau(x_1, l)} d(\underline{x}^{(l)}(t) - \underline{x}_{\text{sol},1}(t - lv_1)) = 0. \quad (21)$$

式中:  $\underline{x}_{\text{sol},1}(t_1) < \underline{x}_{\text{sol},1}(t_2), \forall t_1 < t_2, \underline{x}_{\text{sol},1}(-\infty) = x_0, \underline{x}_{\text{sol},1}(+\infty) = x_1, v_1$  为过渡区间  $\tau_1$  的移动速度。

利用单个过渡区间移动速度的正负性可预测过渡区间的收敛性, 例如两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  构成的过渡区间  $\tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$ , 如果过渡区间的移动速度  $v_1 > 0$ , 那么 DP 将收敛于 FP  $x_0$ ; 如果  $v_1 < 0$ , DP 将收敛于 FP  $x_1$ 。因此, BP 阈值对应于  $v_1 = 0$ 。

图 2 和图 3 分别给出了多元 SC-LDPC (4, 8,  $m=3, L=100, w=5$ ) 在迭代次数  $l=100, 200, 300, 400$  时采用耦合 DE 算法和本文提出的内插 DE 算法得到的熵函数  $H(\underline{x}^{(l)})$ 。两图中横坐标  $L \in [0, 100]$  表示位置, 纵坐标表示熵函数  $H(\underline{x}^{(l)})$ 。两图的 DP 都具有一个过渡区间  $\tau_1, \tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$  位于两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间,  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ 。可以发现, 随着迭代次数的增加, 过渡区间

沿着耦合链由左向右移动。经过充分的迭代后,每次迭代过渡区的位移量几乎是不变的。比较图 2 和图 3 可以发现,本文提出的内插 DE 算法得到的熵函数与耦合 DE 算法得到的熵函数非常接近,近似相等。

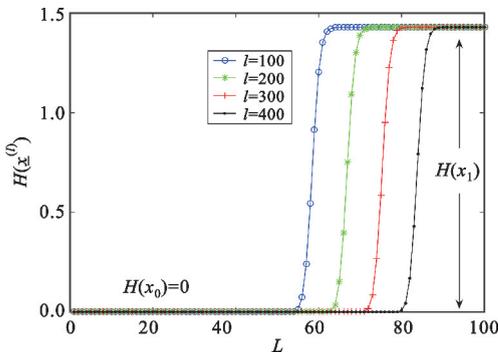


图 2 采用耦合 DE 算法得到的熵函数  $H(x)$

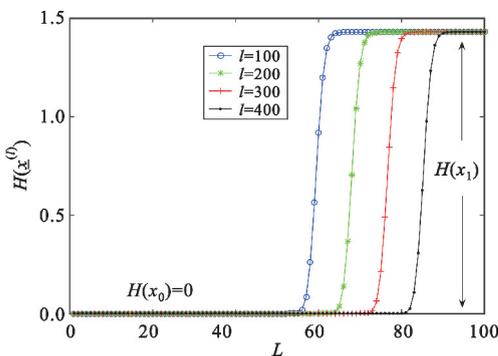


图 3 采用内插 DE 算法得到的熵函数  $H(x)$

### 3 内插 DE 算法

#### 3.1 内插 DE 算法递归式

定义 13 本文讨论具有一个过渡区间  $\tau_1$  的 DP, 过渡区间  $\tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$  位于两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间,  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ 。密度  $X_1^{(l)}(t)$  为

$$X_1^{(l)}(t) = (\alpha_1^{(l)}(t))x_1 + (1 - \alpha_1^{(l)}(t))\Delta_0. \quad (22)$$

式中:  $\alpha_1^{(l)}(t)$  称为内插函数,  $y_1 = \rho^{\boxtimes}(x_1)$ ,  $x_1 = p(\varepsilon) \boxtimes \lambda^{\boxtimes}(y_1)$ 。

定义 14 内插 DE 算法中构造两个转移函数来更新内插函数, 如公式 (23) 所示:

$$\begin{cases} \hat{\rho}_{0,1}(\alpha) = \frac{H[(\rho^{\boxtimes}(\alpha x_1 + (1-\alpha)\Delta_0) - \Delta_0) \boxtimes (x_1 - \Delta_0)]}{H[(y_1 - \Delta_0) \boxtimes (x_1 - \Delta_0)]} \\ \hat{\lambda}_{0,1}(\beta) = \frac{H[(p(\varepsilon) \boxtimes (\lambda^{\boxtimes}(\beta y_1 + (1-\beta)\Delta_0) - \Delta_0) \boxtimes (y_1 - \Delta_0)]}{H[(x_1 - \Delta_0) \boxtimes (y_1 - \Delta_0)]} \end{cases} \quad (23)$$

定义 15 第  $l$  轮迭代的内插 DE 递归式为

$$\begin{cases} \alpha_1^{(l)}(t) = \int_0^1 \tilde{\alpha}_1^{(l-1)}(t-s) ds \\ \tilde{\beta}_1^{(l)}(t) = \hat{\rho}_{0,1}(\alpha_1^{(l)}(t)) \\ \beta_1^{(l)}(t) = \int_0^1 \tilde{\beta}_1^{(l)}(t+s) ds \\ \tilde{\alpha}_1^{(l)}(t) = \hat{\lambda}_{0,1}(\beta_1^{(l)}(t)) \end{cases} \quad (24)$$

定义 16 将  $\tilde{\alpha}_1^{(l)}(t)$  初始化:

$$\tilde{\alpha}_1^{(l)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

观察发现, 内插函数  $\tilde{\alpha}_1^{(l)}(t)$  随着  $t$  增加是非递减的, 因此有

$$\tilde{\alpha}_1^{(l)}(t_1) < \tilde{\alpha}_1^{(l)}(t_2), \forall t_1 < t_2, \tilde{\alpha}_1^{(l)}(t) \in [0, 1]. \quad (26)$$

定义 17 令  $t^{(l)}(\tilde{\alpha}_1^{(l)})$  表示  $\tilde{\alpha}_1^{(l)}(t)$  的反函数, 那么过渡区间的移动速度  $\hat{v}_1$  为

$$\hat{v}_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} t^{(l+1)}(0.5) - t^{(l)}(0.5). \quad (27)$$

#### 3.2 简化转移函数的计算

定义 18 本文讨论具有一个过渡区间  $\tau_1$  的 DP, 过渡区间  $\tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$  位于两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间,  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ 。为减少卷积的计算, 减少计算量, 定义公式 (28):

$$\begin{cases} \xi_{1,0}^{(s_1, s_2)} = H(x_1^{\boxtimes s_1}) \\ \xi_{1,0}^{(q_1, q_2)} = \begin{cases} H(p(\varepsilon) \boxtimes \gamma_1^{\boxtimes q_1}), & q_2 = 0 \\ 0, & q_2 > 0 \end{cases} \\ \eta_{1,0} = H[(y_1 - \Delta_0) \boxtimes (x_1 - \Delta_0)] \end{cases} \quad (28)$$

式中:  $s_1, s_2 \in \{0, 1, \dots, d_c\}$ ,  $q_1, q_2 \in \{0, 1, \dots, d_v\}$ ,  $d_c$  和  $d_v$  分别表示 CN 和 VN 的度。密度对  $(x_0, y_0)$  和  $(x_1, y_1)$  满足  $x_0 = y_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $y_1 = \rho^{\boxtimes}(x_1)$ ,  $x_1 = p(\varepsilon) \boxtimes \lambda^{\boxtimes}(y_1)$ 。

两个转移函数 (23) 转化为式 (29):

$$\begin{cases} \hat{\rho}_{0,1}(\alpha) = \frac{1}{\eta_{1,0}} \left\{ \sum_{s_0=0}^{d_c-1} \binom{d_c-1}{s_0} \alpha^{s_0} (1-\alpha)^{(d_c-1-s_0)} \times \right. \\ \left. \left( \xi_{1,0}^{(s_0+1, d_c-1-s_0)} - \xi_{1,0}^{(s_0, d_c-s_0)} \right) - \xi_{1,0}^{(1, d_c-1)} + \xi_{1,0}^{(0, d_c)} \right\} \\ \hat{\lambda}_{0,1}(\beta) = \frac{1}{\eta_{1,0}} \left\{ \sum_{q_0=0}^{d_v-1} \binom{d_v-1}{q_0} \beta^{q_0} (1-\beta)^{(d_v-1-q_0)} \times \right. \\ \left. \left( \xi_{1,0}^{(q_0+1, d_v-1-q_0)} - \xi_{1,0}^{(q_0, d_v-q_0)} \right) - \xi_{1,0}^{(1, d_v-1)} + \xi_{1,0}^{(0, d_v)} \right\} \end{cases} \quad (29)$$

式 (29) 适合规则 SC-LDPC 码, 对于非规则 SC-LDPC 码, 需根据度分布表达式做适当变换, 由于篇

幅限制, 本文不予讨论。

**假设 2:** 在内插 DE 算法中发现与假设 1 类似的现象, 介于两个非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间的过渡区间  $X_1^{(l)}(t), x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ , 经过充分的迭代后, 每次迭代过渡区间的位移量几乎是不变的, 也就是说, 内插函数  $\alpha_1^{(l)}(t)$  的形状经过  $\hat{v}_1$  的位移后收敛于最终的  $\alpha_{\text{sol},1}(t)$ :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{t \in R \cup \{\pm \infty\}} |\alpha_1^{(l)}(t) - \alpha_{\text{sol},1}(t - \hat{v}_1)| = 0. \quad (30)$$

式中:  $\alpha_{\text{sol},1}(t_1) < \alpha_{\text{sol},1}(t_2), \forall t_1 < t_2, \alpha_{\text{sol},1}(-\infty) = 0, \alpha_{\text{sol},1}(+\infty) = 1$ 。

### 3.3 BP 阈值分析

**定义 19** 多元 SC-LDPC  $(\lambda, \rho, m, L, w)$  在删除概率为  $\varepsilon$  的 BEC 上, 耦合 DE 算法的 BP 阈值为

$$\varepsilon_{\text{耦合DE}} = \sup \{ \varepsilon \mid \varepsilon \in [0, 1], \lim_{l \rightarrow \infty} x^{(l)}(t) = \Delta_0 \}. \quad (31)$$

由假设 1 知道, 当且仅当位于两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间的过渡区间  $\tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$  的速度  $v_1 > 0$  时,  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ , 有  $\lim_{l \rightarrow \infty} x^{(l)}(t) = \Delta_0$ , 所以耦合 DE 算法的 BP 阈值为满足  $v_1 > 0$  的最大的信道删除概率  $\varepsilon$ 。

**定义 20** 多元 SC-LDPC  $(\lambda, \rho, m, L, w)$  在删除概率为  $\varepsilon$  的 BEC 上, 内插 DE 算法的 BP 阈值为

$$\varepsilon_{\text{内插DE}} = \sup \{ \varepsilon \mid \varepsilon \in [0, 1], \hat{v}_1 > 0 \}. \quad (32)$$

式中:  $\hat{v}_1$  是由两个非跳动 FP  $x_0$  和  $x_1$  决定的第一个过渡区间  $X_1^{(l)}(t)$  的速度。

**定理 1** 多元 SC-LDPC  $(\lambda, \rho, m, L, w)$  在删除概率为  $\varepsilon$  的 BEC 上, 基于假设 1 和假设 2, 耦合 DE 算法的 BP 阈值等于内插 DE 算法的 BP 阈值。

## 4 仿真分析

下面通过仿真来验证内插 DE 算法的性能, 并与传统的耦合 DE 算法进行对比。仿真采用有一个过渡区间  $\tau_1$  的 DP, 过渡区间  $\tau_1 = \tau(x_0, x_1, l)$  位于两个相邻非跳动 FP  $\{x_0, x_1\}$  间,  $x_0 = \Delta_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ 。

### 4.1 BP 阈值比较

表 1 给出了 BEC 上耦合宽度  $w$  为 5, 在不同度分布和  $m$  条件下, 多元 SC-LDPC 码的 BP 阈值比较结果。从表中发现, 相同度分布的多元 SC-LDPC 码, 随着  $m$  增大, BP 阈值增大且越来越接近香农限, 尤其是从  $m=1$  到  $m=3$ , BP 阈值变化很大。数

值仿真角度体现了多元 SC-LDPC 码的阈值饱和。

表 1 不同度分布和  $m$  条件下多元 SC-LDPC 码 BP 阈值比较

度分布	码率	BP 阈值			
		$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=8$
(4, 8)	1/2	0.497 7	0.499 7	0.499 9	0.499 9
(4, 10)	3/5	0.397 1	0.399 7	0.399 9	0.399 9
(4, 12)	2/3	0.330 2	0.333 0	0.333 3	0.333 3

表 2 是在 BEC 上耦合宽度  $w$  为 5 的多元 SC-LDPC(4, 8) 码在  $m$  为 1、3、5、8 时耦合 DE 算法与内插 DE 算法的 BP 阈值比较, 可以看出, 耦合 DE 算法的 BP 阈值与内插 DE 算法的 BP 阈值相等。

表 2 内插 DE 算法与耦合 DE 算法的 BP 阈值比较

算法	BP 阈值			
	$m=1$	$m=3$	$m=5$	$m=8$
耦合 DE 算法	0.497 7	0.499 7	0.499 9	0.499 9
内插 DE 算法	0.497 7	0.499 7	0.499 9	0.499 9

### 4.2 计算复杂度

表 3 比较了两种算法在单次迭代计算过程中所需的计算量, 其中  $w, L, m, d_c$  和  $d_v$  分别表示耦合宽度、耦合长度、每符号含有的比特数、校验节点的度和变量节点的度。可以发现, 耦合 DE 算法由于迭代的是高维的 DE 递归式, 因此耦合计算量与维度  $m$  有关,  $m$  增加, 计算量增加。内插 DE 算法迭代的是一维内插函数, 因此内插计算量比耦合 DE 算法的计算量小, 特别当  $m$  很大时内插 DE 算法的计算量比耦合 DE 算法的计算量小得多。例如, 对于多元 SC-LDPC(4, 8),  $m$  为 8,  $w$  为 5,  $L$  为 100, 耦合 DE 算法需要加法运算 141 200 次和乘法运算 297 200 次, 而内插 DE 算法只需要加法运算 3 400 次和乘法运算 8 400 次。

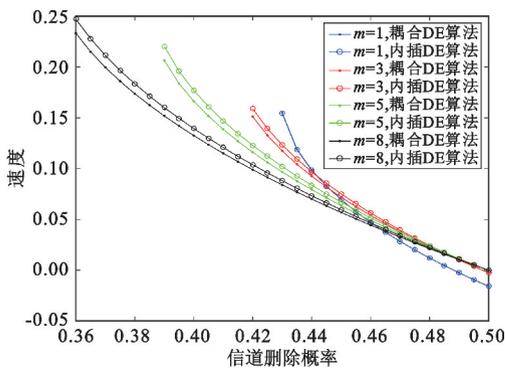
表 3 单次迭代过程内插 DE 算法与耦合 DE 算法计算量比较

译码算法	加法运算	乘法运算
耦合 DE	$m \times (m+1) \times (m+5) \times L \times (d_v + d_c - 3) / 6 + 2 \times L \times (w-1)$	$(m+1) \times (m+2) \times (m+3) \times L \times (d_v + d_c - 3) / 3 + 2 \times L$
内插 DE	$(2 \times d_v + 2 \times d_c + 2) \times L + 2 \times L \times (w-1)$	$(d_v \times d_c + d_c \times d_c + 2) \times L + 2 \times L$

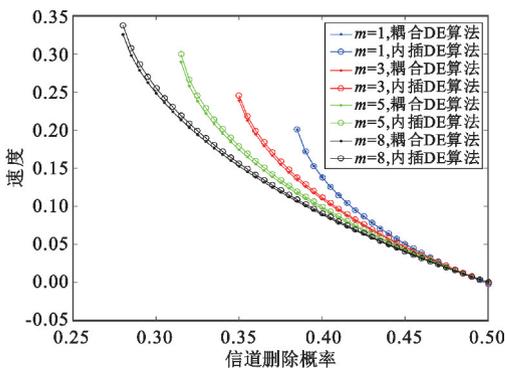
### 4.3 译码波速度

图 4(a)、(b)、(c) 分别给出了在 BEC 上耦合宽

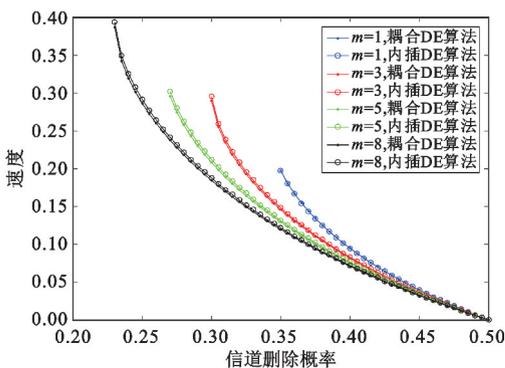
度  $w$  为 5 的多元 SC-LDPC (3, 6) 码、(4, 8) 码和 (5, 10) 码, 利用内插 DE 算法与耦合 DE 算法在  $m$  为 1, 3, 5, 8 时不同信道删除概率下得到的译码波速度值, 横坐标表示信道删除概率, 纵坐标表示译码波速度, 圆圈和点分别表示内插 DE 算法和耦合 DE 算法在不同信道删除概率下测得的速度值。当  $m$  为 1 时, 内插 DE 算法测得的速度与耦合 DE 算法测得的速度相等; 当  $m$  分别为 3, 5, 8 时, 内插 DE 算法测得的速度与耦合 DE 算法测得的速度很接近, 误差在  $[0, 0.05]$  范围内, 特别是在信道删除概率为 BP 阈值时, 两者相等。可见, 内插 DE 算法可对 BEC 上多元 SC-LDPC 码译码波速度起到很好的预测作用。



(a) 多元 SC-LDPC (3, 6) 码



(b) 多元 SC-LDPC (4, 8) 码



(c) 多元 SC-LDPC (5, 10) 码

图 4 耦合 DE 算法与内插 DE 算法测得译码波速度

#### 4.4 仿真结果总结

总结分析仿真结果发现, 与耦合 DE 算法相比, 内插 DE 算法可很好地预测 BEC 上多元 SC-LDPC 码译码波速度, 内插 DE 算法与耦合 DE 算法的 BP 阈值相等, 且内插 DE 算法的计算复杂度要比耦合 DE 算法的计算复杂度小很多, 尤其当耦合 DE 递归式为高维时。综上所述, 内插 DE 算法以较低的计算复杂度达到了耦合 DE 算法预测译码波速度的效果。

#### 5 结束语

针对 BEC 上多元 SC-LDPC 码 BP 译码算法中译码波速度分析复杂度高的问题, 本文采用内插 DE 算法来达到既可以准确计算译码波速度又能降低计算复杂度的目的。内插 DE 算法利用一维内插函数在两个非跳动 FP 间插值密度。构造了两个转移函数来更新内插函数, 将转移函数进一步转化来减少卷积运算, 降低了计算复杂度。译码波的速度分析可应用于 SC-LDPC 码的度分布最优化设计、耦合方式设计等方面。下一步将构造并分析介于一维内插 DE 算法和  $m$  维耦合 DE 算法间的  $n$  维内插函数 ( $1 < n < m$ )。

#### 参考文献:

- [1] FELSTROM A J, ZIGANGIROV K S. Time-varying periodic convolutional codes with low-density parity-check matrix [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, 45(6): 2181-2191.
- [2] 周华, 王雪. 窗口大小自适应的空间耦合 LDPC 码译码算法[J]. 电讯技术, 2019, 59(12): 1429-1434.
- [3] LENTMAIER M, SRIDHARAN A, ZIGANGIROV K S, et al. Terminated LDPC convolutional codes with thresholds close to capacity [C]//Proceedings of 2005 International Symposium on Information Theory. Perth: IEEE, 2005: 1372-1376.
- [4] KUDEKAR S, RICHARDSON T J, URBANKE R L. Wave-like solutions of general 1-D spatially coupled systems [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(8): 4117-4157.
- [5] RATHI V, URBANKE R. Density evolution, thresholds and the stability condition for non-binary LDPC codes [J]. IEE Proceedings-Communications, 2005, 152(6): 1069-1074.
- [6] YEDLA A, JIAN Y Y, NGUYEN P S, et al. A simple proof of Maxwell saturation for coupled scalar recursions [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60

- (11):6943–6965.
- [ 7 ] PIEMONTESE A, AMAT A G, COLAVOLPE G. Nonbinary spatially-coupled LDPC codes on the binary erasure channel [ C ]//Proceedings of 2013 IEEE International Conference on Communications. Budapest: IEEE, 2013:3270–3274.
- [ 8 ] KUDEKAR S, RICHARDSON T J, URBANKER L. Threshold saturation via spatial coupling: why convolutional LDPC ensembles perform so well over the BEC [ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(2):803–834.
- [ 9 ] ANDRIYANOVA I, AMAT A G. Threshold saturation for nonbinary SC-LDPC codes on the binary erasure channel [ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(5):2622–2638.
- [ 10 ] AREF V, SCHMALEN L, TEN BRINK S. On the convergence speed of spatially coupled LDPC ensembles [ C ]//Proceedings of 2013 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Allerton: IEEE, 2013:342–349.
- [ 11 ] EL-KHATIB R, MACRIS N. The velocity of the propagating wave for spatially coupled systems with applications to LDPC codes [ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(11):7113–7131.
- [ 12 ] ZHANG Z, ZHANG K, PENG Z, et al. Velocity analysis of BP decoding waves for SC-LDPC ensembles on BMS channels: an interpolation-based approach [ J ]. IEEE Transactions on Communications, 2020, 68(6):3286–3301.

### 作者简介:

许梦楠 女, 1996 年生于江苏宿迁, 硕士研究生, 主要研究方向为无线通信。

吴雅婷 女, 1984 年生于江西南城, 2009 年于北京大学获博士学位, 同年于香港城市大学获博士学位, 现为副教授, 主要研究方向为数字信号处理、协作 MIMO 通信。

施文明 男, 1996 年生于安徽芜湖, 硕士研究生, 主要研究方向为无线通信。

张钟浩 男, 1983 年生于湖南衡阳, 2014 年于香港城市大学获博士学位, 现为讲师, 主要研究方向为信号处理、信道编码和无线通信。



## 2021—2022 年度“《电讯技术》十佳通讯员”名单揭晓

根据本刊通讯员第一聘期考核结果, 结合日常工作情况与成效, 编辑部评选出班亚龙等 10 名通讯员为 2021—2022 年度“《电讯技术》十佳通讯员”, 名单(以姓名拼音为序)如下:

姓名	机构
班亚龙	中国电子科技集团公司第十研究所
成磊峰	中国电子科技集团公司第十研究所
孔维华	成都信息工程大学
刘洋	中国电子科技集团公司第十研究所
刘垚圻	中国科学院计算技术研究所
宁婕妤	中国电子科技集团公司第十研究所
宋选安	国网湖北省电力有限公司信息通信公司
童大鹏	中国电子科技集团公司第十研究所
张小苗	中国电子科技集团公司第十研究所
赵禄达	国防科技大学

希望获奖的通讯员再接再厉, 为本刊的发展做出更大的成绩和贡献。

本刊编辑部 赵勇