文章编号:1001-893X(2012)03-0342-05

低密度格码在 OFDM 系统中的应用与性能仿真*

顾 伟,朱联祥

(重庆邮电大学信号与信息处理重点实验室,重庆400065)

摘 要:信道编码是 OFDM 系统的关键技术之一,低密度格码(Low Density Lattice Codes, LDLC)则是 一种能高效译码且达到 AWGN 信道容量的新型编码技术,它兼具格码和低密度奇偶校验码(Low Density Parity Codes, LDPC)的特点。基于 LDLC 码编译码原理,给出了 LDLC 码作为前向纠错编码技 术应用于 OFDM 系统的方案,在 MATLAB 平台下仿真研究了 LDLC – OFDM 系统在 Rayleigh 衰落信道 下的性能,结果表明 LDLC 码很大程度地改善了 OFDM 系统的误码率性能,且优于 LDPC 码。 关键词:正交频分复用;信道编码;低密度格码;瑞利衰落

中图分类号:TN911.2 文献标志码:A doi:10.3969/j.issn.1001-893x.2012.03.018

Application of Low Density Lattice Codes in OFDM System and Performance Simulation

GU Wei, ZHU Lian-xiang

(Chongqing Key Laboratory of Signal and Information Processing, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: Channel coding is one of key technologies for OFDM system. Low density lattice codes(LDLC), which combine the features of lattice codes and low density parity codes(LDPC), are recently – proposed lattice codes that can be decoded efficiently and approach the capacity of the additive white Gaussian noise(AWGN) channel. The basic principles of LDLC are described and the application of LDLC as a forward error correction coding in OFDM system with Rayleigh fading is researched. The performance of LDLC – OFDM system is studied on MATLAB. Simulation results show that the bit error rate(BER) performance of LDLC – OFDM system is significantly improved compared with OFDM system and better than that of LDPC – OFDM system.

Key words: orthogonal frequency division multiplexing (OFDM); channel coding; low density lattice code (LDLC); Rayleigh fading

1 引 言

寻找某种能取得接近(最终达到)香农容量极限 的可靠通信的信道编码方案一直是编码界的重要目 标。格码是线性码在欧氏空间里的类似码,它被建 议作为加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道上的高效码^[1-2]。AWGN 信道上 实用的码字通常是基于有限字符编码,为找到一种 具有高效编、解码方案的实用格码, Naftali 等人在受 到低密度奇偶校验码(Low Density Parity Check Code, LDPC)的启发后,于 2007 年提出了低密度格玛(Low Density Lattice Code, LDLC)^[3]。LDLC 码的校验矩阵 呈稀疏性,故适合采用类似于 LDPC 码的基于二分

 ^{*} 收稿日期:2011 - 11 - 01;修回日期:2012 - 01 - 11
 基金项目:信号与信息处理重庆市市级重点实验室建设项目(CSTC2009CA2003)
 Foundation Item: The Project of Key Laboratory of Signal and Information Processing of Chongqing(CSTC2009CA2003)

^{· 342 ·}

图的线性迭代算法来实现其接近 AWGN 信道容量 的高效译码,且译码复杂度线性于码长^[4]。

OFDM 技术在抗多径干扰方面极具优势。 OFDM 符号间插入保护间隔后,可以避免码间干扰 (ISI),并减小子信道间干扰(ICI)。但在 Rayleigh 环 境下,某些子载波可能会由于深衰落而被完全淹没, 从而影响整个系统的误码率性能(BER),为了消除 这种影响,我们可以引入纠错编码技术。本文将 LDLC 码作为前向纠错编码应用于 OFDM 系统中,仿 真并对比分析其性能和复杂度。

2 LDLC 简介

2.1 定义

一个 n 维格点对应着格码的一个码字,格的定 义式为

$$\Lambda = \{ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{b} : \boldsymbol{b} \in Z^n \}$$
(1)

式中, G 为 n × n 的生成矩阵, b 为 n 维整数信息矢 量。格码就对应着一个整形区域 B 内所有格点的 集合。

定义 $H = G^{-1}$ 为格码的校验矩阵,那么 LDLC 码的校验矩阵一般则为维数为 n、度为 d 的魔方阵, 即 $n \times n$ 的H 中每一行每一列均有 d 个不同的非零 元素,元素取值于生成序列 $\{1 \ge |h_1| \ge |h_2| \ge \cdots \ge$ $|h_d| > 0\}$ 。

2.2 编码

生成矩阵 *G* 不具有稀疏性,用 x = Gb 来直接 编码的计算和存储复杂度为 $o(n^2)$,但校验矩阵 *H* = G^{-1} 呈现稀疏特性,若采用基于 *H* 的 Jacobi 迭代 算法则可使编码复杂度降低为o(n)。迭代公式的 推导和定义如下:

$$H \cdot x = b$$

$$\Rightarrow (D + L + U) \cdot x = b$$

$$\Rightarrow Dx = -(L + U)x + b$$

$$\Rightarrow x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$\Rightarrow x^{(t)} = -D^{-1}(L + U)x^{(t-1)} + D^{-1}b$$

$$t = 1, 2, 3 \cdots$$
(2)

式中,*t* 为迭代次序,D、L 与U 分别为H 的对角阵、 下三角阵和上三角阵,即有H = D + L + U。如果 矩阵H 非奇异,且序列 $\{x^{(t)}\}$ 收敛于x,那么x 必是 方程Hx = b 的解,也就是 LDLC 的码字。

根据数值分析理论和仿真经验可知,当同时满 足下列3个条件时可以保证编码算法收敛:**H**的维 数较大,度数较小(如: $n \ge 100$, $d \le 10$);生成序列的 最大元素值 $h_1 = 1$,且保证 $\partial = \sum_{i=2}^{d} h_i^2 / h_1^2 < 1$;**H**矩 阵做适当的行变换使其对角线上元素为 ± h_1 。

3 LDLC 在 OFDM 系统中的应用

3.1 系统模型

图 1 为 LDLC – OFDM 系统的发送端。两路信 息输入 b_1 、 b_2 分别经过 LDLC 编码后输出 I 路码字 x_1 和 Q 路码字 x_2 ,然后把 x_1 、 x_2 映射成复数据流 X_i = a + jb,接着将 X_i 串并变换为 X_1, X_2, \dots, X_k ,分别 对应着 OFDM 系统的 k 个子载波,以此作为 OFDM 的调制信号。OFDM 调制包括 IFFT 变换和为每一 个 OFDM 符号添加循环前缀 CP。最后信号经射频 发射出去。



图 1 系统发送端模型 Fig.1 Transmitter of the communication system

信号传播环境选用瑞利衰落信道,由改进型的 Jakes 模型来模拟^[5],该模型的定义如下:

$$X(t) = X_c(t) + jX_s(t)$$
(3)

式中,X(t)为瑞利噪声信号, $X_c(t)$ 、 $X_s(t)$ 分别为其同相和正交部分,且有:

$$\begin{split} X_c(t) &= \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{M} \cos \phi_n \cos(w_d t \cos \alpha_n + \phi) \\ X_s(t) &= \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{n=1}^{M} \sin \phi_n \cos(w_d t \cos \alpha_n + \phi) \\ \alpha_n &= \frac{2\pi n - \pi + \theta}{4M}, n = 1, 2, \cdots, M \end{split}$$

式中, θ 、 ϕ 、 ϕ_n 为[$-\pi$, π]上均匀分布,且独立统计, *M* 为 Jakes 仿真器所需要的正弦波个数。与 Jakes 正弦叠加法的确定模型相比,改进型模型引入了随 机路径增益、随机多普勒频率以及随机的正弦波初 始相位,从而使该模型成为具有良好统计特性的非 确定性模型。

系统接收端模型如图 2 所示,接收信号经过射频解调后,到达 OFDM 解调处,先去掉每一个 OFDM 符号的循环前缀 CP,再对其做 FFT 变换得到对应着 OFDM 系统 *k* 个子载波的解调信号 *X*'₁, *X*'₂,…, *X*'_k,接着并串变换后恢复复数数据流 *X*'_i, *X*'_i 再解

· 343 ·

映射为 *I*' 路码字 *y*₁ 和 *Q*' 路码字 *y*₂,并分别进行 LDLC 译码后得到两路信息输出 *b*'₁,*b*'₂。



图 2 系统接收端模型 Fig.2 Receiver of the communication system

3.2 量化译码

系统接收端解映射得到的 *I* 路码字 y_1 和 *Q* 路 码字 y_2 分别作为上下两路 LDLC 译码器的输入。 LDLC 采取基于 Tanner 图的线性迭代算法。迭代中, 变量节点发送给校验节点的信息为概率密度函数 PDFs,校验节点发送给变量节点的信息为 PDFs 的周 期扩展。如果用 x_1, x_2, \dots, x_n 表示 LDLC 校验矩阵 的变量节点, c_1, c_2, \dots, c_n 表示校验节点, 且设码长 为 *n* 的接收码字 y_1 或 y_2 的码元为 $y_k, k = 1, 2, \dots, n$, 信道噪声方差为 σ^2 ,则系统接收端 LDLC 译码的 过程可描述如下。

(1)初始化:变量节点 x_k, k = 1,2,…, n 传递给 与之相连的校验节点的信息为

$$f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-y_k)^2}{2\sigma^2}}$$
(4)

(2)基本迭代——校验节点信息更新。如果用 f_l(x), *l* = 1,2,…,*r* 表示前半次迭代中与该校验节点 相连的变量节点 *x_{m_i}*发送给它的信息,则校验节点发 送回变量节点 *x_{m_i}*的信息 *Q_j*(x)可由下列三步求得。

卷积:

$$\bar{p}_{j}(x) = f_{1}(\frac{x}{h_{1}}) \otimes \cdots f_{j-1}(\frac{x}{h_{j-1}}) \otimes \cdots$$
$$\otimes f_{j+1}(\frac{x}{h_{j+1}}) \otimes \cdots \otimes f_{r}(\frac{x}{h_{r}})$$
(5)

展开:

$$p_j(x) = \bar{p}_j(-h_j x) \tag{6}$$

周期延拓:

$$Q_j(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_j(x - \frac{i}{h_j})$$
(7)

其中,式(5)、(6)、(7)可从校验方程的角度来直观解 释:由 $\sum_{l=1}^{r} h_l x_{m_l}$ = *integer* 可导出 $x_{m_j} = \frac{1}{h_j}$ (*integer* - $\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{r} h_l x_{m_l}$),再结合独立随机变量和的 PDF 等于 各个随机变量 PDF 的卷积的理论可得到式(5),当 *integer* 为零时,可根据式(5)、(6)计算出发送给 x_{m_i} 节点的 PDFs 信息 $p_j(x)$ 。但为了得到 integer 为每 一个可能的值时对应的 PDFs,需要再进行式(7)中 的周期延拓处理。

(3) 基本迭代——变量节点信息更新。如果 Q_l(x), l = 1,2,…,n 表示前半次迭代中与该变量节点 相连的校验节点 c_m发送给它的信息,则变量节点发送 回校验节点 c_m的信息 f_j(x)可由下列两步骤求得。

乘积:

$$\bar{f}_j(x) = e^{-\frac{(x-y_k)^2}{2\sigma^2}} \prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^e Q_l(x)$$
 (8)

标准化:

$$f_j(x) = \frac{\bar{f}_j(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_j(x) dx}$$
(9)

其中,式(8)为信道 PDF 与校验节点的更新信息相乘,它们在该变量节点上被看作是独立的信息源。

重复基本迭代2、3至设定的次数。

(4)最终判决:基本迭代完成后,首先,在没有遗漏最后一次迭代中任何校验节点更新信息的基础上 计算出该变量节点最终的 PDFs:

$$\bar{f}_{\text{final}}(x) = e^{-\frac{(x-y_k)^2}{2\sigma^2}} \prod_{l=1}^{e} Q_l(x)$$

然后,求出该 PDFs 的峰值对应的自变量 \bar{x}_k = arg max_x $\bar{f}_{final}(x)$,以此作为码元 x_k , $l = 1, 2, \dots, n$ 的估计值。最后,通过校验方程得到最终的信息输出 $\bar{b} = \lceil H\bar{x} \rfloor_o$

在具体的译码实现中可采用量化处理的译码算法,即用量化数为 L、分辨率为 Δ 、范围为 $D = L \times \Delta$ 的离散矢量来近似表示每个 PDF 信息,要求则是 $1/\Delta \pi D 必须为整数。根据"3\sigma 法则"可知,当 <math>\Delta = 1/64, L = 256$ 时,高斯分布的 PDF 的量化误差可以 忽略不计,此时 $D = L \times \Delta = 4$ 。

量化后,式(4)中 $f_k(\mathbf{x})$ 可表示为 $f_j(k\Delta), k \in Z$ 。在理想点附近对 $f_j(\mathbf{x})$ 求滑动平均可得到式(5)中的 $f_i(\mathbf{x}/h_i)$,即需要计算

$$\frac{1}{2l_w+1}\sum_{i=-l_w}^{l_w}f_j((k-i)\Delta) ,$$

其中, $l_w = \lceil |h_j|/2 \rfloor$ 为滑动平均窗口长度,求滑动平 均可由 MATLAB 中的 filter 函数来实现。为了简化 处理,可交换式(6)、(7)的执行顺序,即先对式(5)中 的卷积结果 $\bar{p}_j(x)$ 进行周期为 1 的延拓,即: $\bar{Q}_j(x)$ = $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{p}_j(x+j)$,然后再作展开运算: $Q_j(x)$ = $\bar{Q}_j(-h_{jx})$ 。如果对式(5)中的 $\bar{p}_j(x)$ 做 FFT(长度为 L)变换,再以 D 为间隔抽取就可得到 $1/\Delta$ 个抽样值, 且对应着 $\bar{Q}_{j}(x)$ 的一个周期。若先对式(5)中 d-1 个 $f_{i}(k\Delta)$ 分别以 $1/\Delta$ 为间隔抽取并对应相加,即:

$$g_i = \sum_{k=0}^{D-1} \bar{f}_{i+k/\Delta}, i = 1, 2, \cdots, 1/\Delta$$

然后再求 g_i 的 FFT(长度为 $1/\Delta$),最后把 d-1 个 FFT 相乘后再进行 IFFT 变换,也可得到一个周期的 $\overline{Q}_j(x)$ 。紧接着对 $\overline{Q}_j(x)$ 按 $\lceil |h_j| \rfloor$ 做展开运算就可 得到校验节点信息的更新值 $Q_j(x)$ 。变量节点信息 的更新采取类似的量化处理方法。

4 仿真与结果分析

4.1 性能指标的确定

根据香农理论可知对于维数 *n* 较大的格码,好 码的码字为半径 $r = \sqrt{nP_X}$ 的球体上的一致分布,其 中 $P_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 为信号平均功率。每个格点的周 围为 Voronoi 域或邻近域,若 V_c 为 Voronoi 域的平均 体积,则有 $V_c = \det |G|$ 。根据文献[2]有 $r^2 = (\sqrt{nP_X})^2 = \frac{V_c^{2/n}}{2\pi e} \cdot n_\circ$ 设 P_N 为高斯噪声平均功率, 则低密度格码(LDLC)在 AWGN 信道上的信噪比的 广义为

$$\mu = P_X / P_N = \frac{1}{n} \left(\sqrt{nP_X} \right)^2 / P_N = \frac{1}{n} \left(\frac{V_c^{2/n}}{2\pi e} \cdot n \right) / P_N = \frac{\left(\det \mid G \mid \right)^{2/n}}{2\pi e} / P_N = \frac{\sqrt[n]{(\det \mid G \mid)^2}}{2\pi e} / P_N$$
(10)

其中一般地,需要用归一化处理来保证上式中 $|\det(G)| = 1$ 。蒙特卡洛仿真的两大性能指标为信 噪比和误比特率,求误比特数需要统计 $b_k \neq \bar{b}_k, k =$ 1,2,…,*n* 的个数。

4.2 参数设置与结果分析

图 3 为 LDLC 码在 AWGN 信道下的仿真结果。 LDLC 采用无四环的校验矩阵 H,其中码长 n = 520时,度 d = 5; n = 1 040时,度 d = 7。编码器的输入信息 b 采用二进制和多进制(此处选择四进制)的两种情况,即序列 b 的元素值取自于 $\{-1,1\}$ 和 $\{-3, -1,1,3\}$ 。译码迭代次数设置为: t = 100。仿真帧数的设置为:码长 n = 520时,帧数 frame = 4 000;码 长 n = 1040时, 帧数 frame = 2000, 这样当误码率 BER $\approx 10^{-5}$ 时, 平均统计的误比特数大概为 20。结 果表明 BER $\approx 10^{-5}$ 时, 码长 n = 520、1040的 LDLC 分 别需要2 dB和1.5 dB, 即距离香农限分别为2 dB和 1.5 dB, 所以1040码长的 LDLC 的纠错性能相比 520 码长时有0.5 dB的改善, 码长越大, 性能越好。从图 中还可以看出当编码器的信息输入 b 为二进制时, 误码率性能要好于四进制的情况, 这恰好证明了 b为多进制时, 码率会增大, 性能会变差。



图 3 AWGN 信道下的仿真结果 Fig. 3 Simulation results on AWGN channel

图 4 为 LDLC 码、LDPC 码分别应用于 OFDM 系 统时在 Rayleigh 信道下的仿真结果。两者都采用无 四环矩阵,仍然选取 520 码长和1 040码长。其中 LDPC 码采用 PEG 构造,其中 520 码长时,列重 w_l = 3,行重 w_r = 6;1040 码长时,列重 w_l = 4,行重 w_r = 8。这里 PEG 构造的基本思路是:先造全零矩阵 H(n,n) = 0,接着在第1列中随机赋值 w_l 个 1,然 后从第2列开始,随机选择一个位置,判断所在行的 行重是否已经大于 wr, 若大于则放弃, 否则继续判 断当这个位置为1时是否会构成四环,若不会,则再 将该位置赋值为1,若有四环,则放弃且重新随机选 择位置,直到该列有 w_l 个 1。OFDM 系统的子载波 个数设置为 52, FFT 长度设为 64, 保护间隔(循环前 缀 CP)长度设为 16(FFT 长度的四分之一);译码迭 代次数 t = 100; 仿真帧数的设置为: 码长 n = 520时,帧数 frame = 2 000;码长 n = 1 040时,帧数 frame =1 000,所以当误码率 BER≈10⁻⁴时,平均统计的 误比特数大概为 200。Rayleigh 噪声由改进型的 Jakes 模型生成,假设信道为理想估计。仿真结果表 明,当误码率 BER≈10⁻⁴时,码长 n = 520、1 040时, LDLC - OFDM 系统分别需要18.2 dB和14.9 dB, LD-PC - OFDM 系统则分别需要21 dB和17.5 dB, 而未编 码的 OFDM 系统需要34 dB。可以得知:LDLC 和 LD-

PC 都很大程度地改善了未使用任何前向纠错编码的 OFDM 系统的性能,且码长越大,性能越好,相同码长下 LDLC 的纠错性能比 LDPC 要好3 dB左右。同时我们也可以比较两路 LDLC 和两路 LDPC 总的的码率: LDLC 校验矩阵为方阵,码率 r = 1,两路 LDLC 总的码率 $R_{ldle} = 2$;两路 LDPC 总的码率为 $R_{ldpe} = 1$ 。 $R_{ldpe} < R_{ldle}$,LDLC 的码率更大,性能却更好,所以 OFDM 系统采用 LDLC 码时整体的纠错性能要好于 LDPC 码。



图 4 Rayleigh 信道下的仿真结果 Fig.4 Simulation results on Rayleigh channel

LDLC 译码中 t 次迭代后,量化处理的线性迭代 译码总的计算复杂度为 $o(n \times d \times t \times \frac{1}{\Delta} \times \text{lb}(\frac{1}{\Delta}))$, 总的存储复杂度为 $o(n \times d \times t)$,可以看出虽然 LDLC 迭代译码算法线性于码长,但采取量化处理算 法后,量化数 L 明显增加了存储复杂度,所以 LDLC 码在 OFDM 系统中的纠错性能要比 LDPC 码更好,但 付出的代价更大,所以简化的 LDLC 译码算法的研究 成了一项重要的课题,文献[6]给出了与 LDPC 码的计 算和存储复杂度相当的 LDLC 简化译码算法。

5 结 论

本文分析了 LDLC 码的原理,通过仿真验证了 其在 AWGN 信道下具有良好的纠错性能。同时把 LDLC 码应用于 OFDM 系统中,让两者联合对抗瑞利 衰落。仿真结果表明,LDLC 码很大程度地改善了 OFDM 系统在衰落信道下的误码率性能,并要好于 LDPC 码。考虑到实际的无线通信系统中对于基带 信号处理的实时性要求,LDLC 的简化译码算法研究 至关重要。

低密度格码是格码研究的一次突破,它是继 Turbo码、LDPC码后又一种极具应用潜力的信道编 码技术。而 MIMO 与 OFDM 是 LTE(Long Term Evolution)中两大关键技术^[7],所以 LDLC 码在 MIMO – OFDM 系统中的应用研究将是今后的工作方向。

参考文献:

- Urbanke R, Rimoldi B. Lattice codes can achieve capacity on the AWGN channel[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1998, 44(1):273 – 278.
- [2] Erez U, Zamir R. Achieving 1/2 log(1 + SNR) on the AWGN channel with lattice encoding and decoding [J].
 IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2293 2314.
- [3] Sommer N, Feder M, Shalvi O. Low density lattice codes[J]
 IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54 (4):
 1561 1585.
- [4] 朱联祥,代改荣.低密度格码编译码原理及其性能仿 真[J].重庆邮电大学学报(自然科学版),2011,23
 (2):167-171.
 ZHU Lian - xiang, DAI Gai - rong. Principles of low density lattice codes and their performance simulation[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edition),2011,23(2):167-171.(in Chinese)
- [5] 夏喆,朱晓明,张海涛.改进型 JAKES 模型在 OFDM 系 统中的仿真[J].电子科技,2007(12):12-16. XIA Zhe, ZHU Xiao - ming, ZHANG Hai - tao. Simulation of improved JAKES model in the OFDM system [J]. Electronics Technology,2007(12):12-16. (in Chinese)
- [6] Yona Y, Feder M. Efficient Parametric Decoder of Low Density Lattice Codes [C]//Proceeding of the 2009 International Symposium on Information Theory. Seoul, Korea: IEEE, 2009:744 – 748.
- [7] Hanzo L, Akhtman Y, Wang L, et al. MIMO OFDM for LTE, WiFi and WiMAX: Coherent versus Non – coherent
 [M]. New York: Wiley, 2010.

作者简介:

顾 伟(1988—),男,湖南岳阳人,重庆邮电大学硕士研 究生,主要研究方向为宽带无线技术、移动通信高效编解码;

GU Wei was born in Yueyang, Hunan Province, in 1988. He is now a graduate student. His research interests include error – control coding for OFDM systems operating over fading channels, the efficient codec for mobile communication.

Email:wodedaxue163@163.com

朱联祥(1971一),男,陕西人,博士后,教授,硕士生导师,主要从事无线定位、通信信号处理、数字信号处理技术、信息论与编码等方面的科研及教学工作。

ZHU Lian – xiang was born in Shaanxi Province, in 1971. He is now a professor with the Ph.D. degree and also the instructor of graduate students. His research interests include wireless positioning, communication signal processing, digital signal processing technology, information theory and coding.

Email: zhulx@cqupt.edu.cn

· 346 ·